第 1 講 實數

(A) 觀念複習

主題 1 有理數與無理數

1. 有理數：凡能寫成型如＿＿＿＿＿＿＿的數稱為有理數，通常以 Q 表示。任何有理數皆可用尺規作圖標出(利用相似形原理)。例如：$\frac{5}{3},-\frac{3}{4}$ 都是有理數，

   而任何整數 n 可以寫成 $\frac{n}{1}$，所以所有的整數也都是有理數。

2. 有理數的性質之 1－小數表示

   任何有理數皆可化成＿＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

   換句話說，任何＿＿＿＿＿＿或＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，皆是有理數。

   《牛刀小試》

   1. 將 $\frac{49}{280}$ 化成小數：＿＿＿＿＿＿；此為＿＿＿＿小數。
   2. 將 $\frac{23}{66}$ 化成小數：＿＿＿＿＿＿；此為＿＿＿＿＿＿＿小數。

   【想想看】任給一個有理數，如何快速判斷其為有限小數或無限循環小數？

   例如：$\frac{3}{5}$、$\frac{5172}{30}$、$\frac{43}{2^{100}}$、$\frac{37389}{22}$ 皆為＿＿＿＿小數；

   $\frac{73}{12}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{765422}{96}$ 皆為＿＿＿＿＿＿＿＿小數

   《判斷準則》

   若 b 的質因數只有＿＿或＿＿時，則充分且必要條件，$\frac{a}{b}$ 可化為有限小數

   若 $\frac{a}{b}$ 為循環小數，其循環節小數字至多有 $\boxed{b-1}$ 個。

   有理數的性質之2－稠密性與封閉性

   (A) 稠密性：即對任何 $a,b\in Q$，且 $a\neq b$，必定存在一點 $c\in Q$ 在 a、b 之間。
   (整數即不具有稠密性。)

   (B) 對加法、減、乘、除法都具有封閉性：即對任何 $a,b\in Q$，則＿＿＿＿、＿＿＿＿＿。

3. 無理數：數線上有一些數，無法表示成分數的型式，例如：$\sqrt{3}$ 、$\sqrt[3]{5}$ 、π 、…

   我們稱其為無理數，通常記為 Q^c 。

4. 無理數的性質：

   A. (*a*) 具______性 (*b*) 對加法及乘法都_________封閉性 (*c*) 表成小數皆為_____________。

   B. 無理數的相等：已知 a、b、c、d 是有理數，$\sqrt{2}$ 是無理數且 $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ ，

   則______________。

   ※ a、b、c、d 必須為有理數，否則不一定對，你是否能舉例說明呢？

主題 2 實數的性質

1. _________與________合稱為實數，以符號______(　　　　　) 表示。

2. 實數的基本性質：設 a， b， c 均為實數，則符合以下規則：

   (*i*) 三一律： $a>b$ ，$a=b$ ，$a<b$ 三式中恰有一式成立。

   (*ii*) 遞移律：若 $a>b$ 且 $b>c$ ，則 $a>c$ 。

   (*iii*) 加法律：若 $a>b$ ，則 $a+c>b+c$ 。

   (*iv*) 乘法律：若 $a>b$ ，則 $\begin{cases} ① 當 c>0 時, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ ② 當 c<0 時, \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

3. 實數的大小比較：設 a ，b 為任意實數，則：

   《方法 1－相減法》

   (*i*) $a-b>0 \Leftrightarrow$ ______ (*ii*) $a-b=0 \Leftrightarrow$ _______ (*iii*) $a-b<0 \Leftrightarrow$ ________

   《方法 2－平方法》

   $a^2 \le b^2 \Leftrightarrow$ __________ (比較大小常用這招！)

   《方法 3－三一律》

   兩實數 a 與 b ，則「 $a>b$ 、 $a=b$ 、 $a<b$ 」必恰有一個成立。

   即___________________，這是與複數的一個基本差異。

4. 實數的平方性質： $a^2 \ge 0$ ，且 $a^2=0 \Leftrightarrow$ _________ (重要！)

5. 絕對值：

(i) 絕對值是______的概念，例如：若 a、b 皆為實數，則$|a-b|$表示數線上 a 與 b 兩點間的距離。

(ii) $|a|=\begin{cases} a\ ,\ a\geq 0 \\ -a\ ,\ a\leq 0 \end{cases}$ 【口訣】$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$；$|a|=0 \Leftrightarrow a=0$

主題 3 雙重根式與算幾不等式

1. 根式的運算

(A) 正二次根號：若 $a>0$，則平方後恰等於 a 的正數只有一個，記為 $\sqrt[2]{a}$，簡記為 $\sqrt{a}$

【註】若 $a<0$，則之後會定義 $\sqrt{a}$ 為複數。

(B) 若__________，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$；其他情形，則 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

若__________，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$；其他情形，則 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

2 雙重根號的化簡

(A) a、b 為正數，且 $a>b$，則：$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

【說明】

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

(B) $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=$__________ 【提醒】$\sqrt{a^2}=|a|$ (記得加絕對值)

3. 算幾不等式

A. 設 $a>0,b>0$ 則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$，其中 $\dfrac{a+b}{2}$ 稱為____________，$\sqrt{ab}$ 稱為_____________。

當__________時，等號成立。

B. 設 $a>0,b>0,c>0$，則 $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$，當____________時，等號成立。

主題 4 分點公式

數線上的分點坐標：數線上兩點 $A(a)$ 與 $B(b)$，若 $A-P-B$，且 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\dfrac{m}{n}$，

其中 m、n 為正實數，則 P 的坐標為 $\boxed{\qquad\qquad}$