

陳謹數學

專業、自然、紮實

學測複習講義(上)

複習單元：數與式、多項式、指對數、數列與級數、機率、數據分析

The image displays a dense collection of handwritten mathematical notes and diagrams on a blackboard background. The content is organized into several sections:

- Trigonometry:** Includes the identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, double-angle formulas like $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, and the half-angle formula $\sin \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. A unit circle diagram shows the relationships between $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, and $\cot x$.
- Calculus:** Features the derivative of $(1+e^x)^y$ as $y(1+e^x)^{y-1}$, the integral $\int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx$, and the limit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{5x} = \frac{2}{5}$.
- Algebra:** Shows the quadratic formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, the identity $a^2 + b^2 = c^2$, and the expansion of $(x+y+z)^2$.
- Geometry:** Includes a diagram of a right-angled triangle with sides a , b , and c , and a diagram of a circle with a right-angled triangle inscribed in it.
- Other:** Contains various other formulas such as $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, and $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

學習高中數學三步驟：經常思考、口語表達、重覆練習

高中數學

最專業的規畫，最優質的教學

數學家小故事

Georg Friedrich Bernhard Riemann

(1826 年 9 月 17 日 - 1866 年 7 月 20 日)

德國數學家，黎曼幾何學創始人，複變函數論創始人之一。

並為愛因斯坦(Albert Einstein)的廣義相對論提供了數學基礎。

於 1859 年提出著名的黎曼猜想，

它是數學中一個重要而又著名的未解決的問題（猜想界皇冠）。

多年來它吸引了許多出色的數學家為之絞盡腦汁。

黎曼猜想所以被認為是當代數學中一個重要的問題，主要是因為很多深入和重要的數學和物理結果都能在它成立的大前提下得到證明。

克雷數學研究所設立了\$1,000,000 美元的獎金給予第一個得出正確證明的人。

著名數學家，David Hilbert 對黎曼猜想的高度評價：



If I were to awaken after having
slept for a thousand years, my first
question would be: Has the
Riemann hypothesis been proven?

— David Hilbert —

老師的話

數學是一種用符號記事的語言，是開啟大自然奧秘的鑰匙。在近代科技，扮演著與電腦溝通語言的角色。

高
中
數
學

學
測
複
習
講
義

(上)

目 錄

單元 1、數與式	1
(A)公式與觀念整理	1
【觀念 1】數系【觀念 2】有理數【觀念 3】無理數【觀念 4】根式的運算	
【觀念 5】乘法公式【觀念 6】算幾不等式【觀念 7】分點公式；	
【觀念 8】內分比與外分比【觀念 9】內心的性質【觀念 10】絕對值	
(B)綜合題型分析	4
(C)單元演練(一)	9
(D)模擬試題觀摩	12
單元 2、多項式(一)	13
(A)公式與觀念整理	13
【觀念 1】何謂多項式？【觀念 2】多項式的相等【觀念 3】係數問題	
【觀念 4】除法原理與綜合除法的應用【觀念 5】餘式定理【觀念 6】因式定理	
【觀念 7】求餘式之假設法【觀念 8】插值多項式	
(B)綜合題型分析	16
(C)單元演練(二)	20
(D)模擬試題觀摩	24
單元 3、多項式(二)	27
(A)公式與觀念整理	27
【觀念 1】虛數 $i = \sqrt{-1}$ 的性質【觀念 2】複數【觀念 3】多項式方程式	
【觀念 4】多項式方程式根與係數的關係【觀念 5】有理根的判別法	
【觀念 6】虛根成對定理【觀念 7】二次無理根成對定理【觀念 8】勘根定理	
【觀念 9】 a 的 n 次方根	
(B)綜合題型分析	30
(C)單元演練(三)	35
(D)模擬試題觀摩	39
單元 4、多項式(三)~指對數(一)	43
(A)公式與觀念整理	43
【觀念 1】一元一次不等式【觀念 2】一元二次不等式	
【觀念 3】二次函數的恆正與恆負【觀念 4】高次多項不等式	
【觀念 5】簡易分式不等式【觀念 6】指數律【觀念 7】實數指數的次序性	
【觀念 8】指數方程式【觀念 9】指數不等式	

(B)綜合題型分析	46
(C)單元演練(四)	50
(D)模擬試題觀摩	54
單元 5、指對數(二)	57
(A)公式與觀念整理	57
【觀念 1】對數定義【觀念 2】對數的基本性質【觀念 3】對數運算與換底公式	
【觀念 4】指數函數的圖形【觀念 5】對數函數的圖形【觀念 6】對數方程式	
【觀念 7】對數不等式【觀念 8】求極值問題【觀念 9】首數與尾數	
(B)綜合題型分析	60
(C)單元演練(五)	66
(D)模擬試題觀摩	74
單元 6、數列與級數	79
(A)公式與觀念整理	79
【觀念 1】等差數列【觀念 2】等比數列【觀念 3】等差中項與等比中項	
【觀念 4】遞迴關係式【觀念 5】數學歸納法【觀念 6】等差級數	
【觀念 7】等比級數【觀念 10】 Σ 的性質與 n 項級數之和	
(B)綜合題型分析	82
(C)單元演練(六)	86
(D)模擬試題觀摩	96
單元 7、排列組合(一)	99
(A)公式與觀念整理	99
【觀念 1】邏輯的基本概念【觀念 2】集合的基本概念	
【觀念 3】基本的計數原理【觀念 4】排列	
(B)綜合題型分析	103
(C)單元演練(七)	108
(D)模擬試題觀摩	114
單元 8、排列組合(二)	115
(A)公式與觀念整理	115
【觀念 1】組合的定義與性質【觀念 2】組合恆等式	
【觀念 3】不盡相異物之排列組合【觀念 4】分組分堆問題	
【觀念 5】重複組合【觀念 6】綜合問題【觀念 7】二項式定理	
【觀念 8】多項式定理	
(B)綜合題型分析	118
(C)單元演練(八)	122
(D)模擬試題觀摩	128
單元 9、機率(一)	129
(A)公式與觀念整理	129
【觀念 1】樣本空間與事件【觀念 2】機率的定義【觀念 3】機率的性質	

(B)綜合題型分析.....132

(C)單元演練(九).....138

(D)模擬試題觀摩.....147

單元 10、機率(二)~數據分析(一).....149

(A)公式與觀念整理.....149

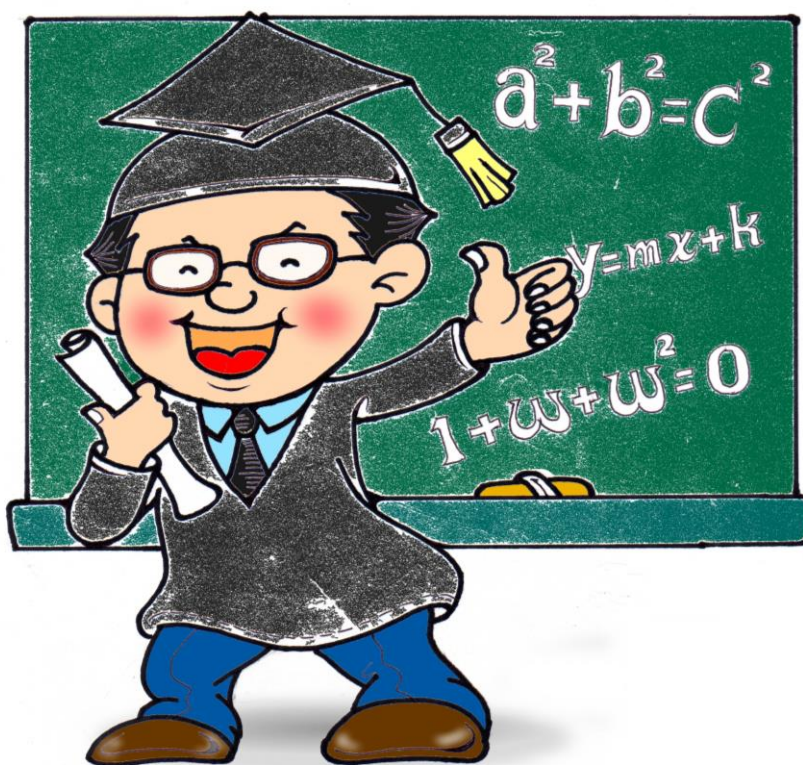
 【觀念 1】重復試驗【觀念 2】獨立事件【觀念 3】貝氏定理

 【觀念 4】未分組資料求均量【觀念 5】未分組資料求差量

(B)綜合題型分析.....152

(C)單元演練(十).....158

(D)模擬試題觀摩.....170



05

國中 數學
 高中 數學
 大學 微積分、線性代數
 一對一 / 一對二家教 🏠

陳老師

☎ 0933-783-363
 ✉ kkman124@yahoo.com.tw



歡迎預約試聽

國立大學數學博士
 十多年高中數學教學經驗
 完整課程規劃、自編教材
 專攻學測、指考複習與考題分析
 升研究所微積分、線性代數授課

平日工作無法接聽電話，若有家教需求請先加 line id 詢問：chenzh2016

【知識版塊】

1、關於學習

我們能記得

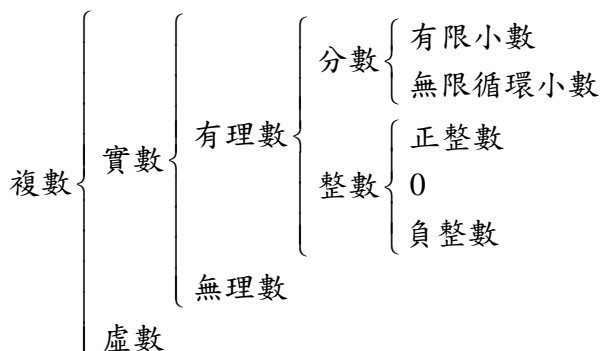
- ▶ 10%讀到的東西
- ▶ 20%聽到的東西
- ▶ 30%看到的東西
- ▶ 50%聽到和看到的東西
- ▶ 70%說出來的東西
- ▶ 90%說出來和實地做的東西

無論哪個學科都一樣，當我們知道一個觀念之後，如果能試著說並實際做出來，我們才能記得更牢，並且將知識內化成我們的技能。

《單元 1 數與式》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】數系



【觀念 2】有理數：凡能寫成型如 $\frac{a}{b}$ ($a, b \in Z, b \neq 0$) 的數稱為有理數，通常以 Q 表示。

性質：

(2.1) 具稠密性：即對任何 $a, b \in Q$ ，且 $a \neq b$ ，必定存在一點 $c \in Q$ 在 a, b 之間。

(整數即不具有稠密性。)

(2.2) 對加法、減、乘、除法都具有封閉性：即對任何 $a, b \in Q$ ，

則 $a+b \in Q$ ， $a-b \in Q$ 、 $ab \in Q$ 、 $a \cdot \frac{1}{b} \in Q$

(2.3) 任何有理數皆可化成有限小數或無窮循環小數。換句話說，任何有限小數或無窮循環小數，皆是有理數。例如：3.2、 $2.\overline{34}$ 。

若 b 的質因數只有____或____時，則充分且必要條件， $\frac{a}{b}$ 可化為有限小數；

若 $\frac{a}{b}$ 為循環小數，其循環節小數字至多有 $b-1$ 個。

例如： $\frac{3}{5}, \frac{5172}{30}, \frac{43}{2^{100}}$ 皆為有限小數；而 $\frac{73}{12}, \frac{3}{7}$ 皆為無窮循環小數。

【觀念 3】無理數：凡不能表成分數型式的數，即為無理數，通常記為 Q^c 。

性質：

(3.1) (a) 具稠密性 (b) 對加法及乘法都不具有封閉性 (c) 表成小數皆為無限不循環。

(3.2) 無理數的相等：已知 a, b, c, d 是有理數， $\sqrt{2}$ 是無理數且 $a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2}$ ，則_____。

【觀念 4】根式的運算

(4.1) 正二次根號：若 $a > 0$ ，則平方後恰等於 a 的正數只有一個，記為 $\sqrt[2]{a}$ ，簡記為 \sqrt{a} 。

【註】若 $a < 0$ ，則之後會定義 \sqrt{a} 為複數。

(4.2) 若 $a < 0$ 且 $b < 0$ ，則 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ ；其他情形，則 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

若 $a > 0$ 且 $b < 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ ；其他情形，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

(4.3) 雙重根式的化簡

a, b 為正數，且 $a > b$ ，則： $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ， $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$

【觀念 5】乘法公式

(5.1) $(a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.2) $(a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.3) $(a+b)(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.4) $(a+b+c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.5) $(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.6) $(a-b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.7) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.8) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【觀念 6】算幾不等式

(6.1) 設 $a > 0, b > 0$ 則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中 $\frac{a+b}{2}$ 稱為 $\underline{\hspace{2cm}}$ ， \sqrt{ab} 稱為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

當 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時，等號成立。

(6.2) 設 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，則 $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ，當 $\underline{\hspace{2cm}}$ 時，等號成立。

【觀念 7】分點公式

(7.1) 數線上的分點坐標：數線上兩點 $A(a)$ 與 $B(b)$ ，若 $A-P-B$ ，且 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r = \frac{m}{n}$ ，

其中 m, n 為正實數，則 P 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(7.2) 平面上的分點公式：在平面上給定兩點 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，而且

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r = \frac{m}{n}$ 。若 $A-P-B$ ，則 P (,)

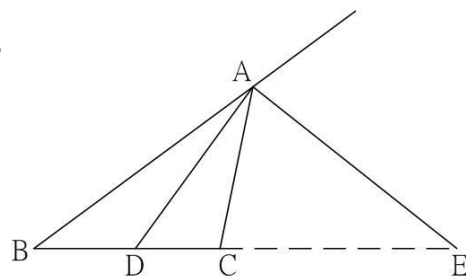
(7.3) 特例：(a) 在平面上給定兩點 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則 \overline{AB} 的中點 $M = ($,)

(b) 在平面上 $\triangle ABC$ 之三頂點分別為 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，則 $\triangle ABC$ 之重心 $G = ($,)

【觀念 8】內分比與外分比

(8.1) 在 $\triangle ABC$ 中，若 \overline{AD} 為 $\angle A$ 之內角平分線交 \overline{BC} 於 D ，則_____。

(8.2) 在 $\triangle ABC$ 中，若 \overline{AE} 為 $\angle A$ 之外角平分線交 \overline{BC} 於 E ，則_____。



【觀念 9】內心的性質

(9.1) 內心為_____。

(9.2) 內心到三邊之距離相等，此距離為三角形之_____。

(9.3) 設 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，其中 $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，則 $\triangle ABC$ 之內心坐標 I 為(,)

【觀念 10】絕對值

(10.1) $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

(10.2) 絕對值的性質：(a) $|x| \geq 0$ (b) $|x - y| = |y - x|$ (c) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (d) $|x + y| \leq |x| + |y|$

可由(d)推得 (e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

(10.3) 設 $y = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$ ，其中 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

(a) 若 n 是奇數，則圖形的最低點處是一點 $(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}, f(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}))$ ，故當 $x = \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}$ 時，

$f(x)$ 有最小值 $f(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2})$

(b) 若 n 是偶數，則圖形的最底處是一條水平線段，故當 $\frac{a_{\frac{n}{2}}}{2} \leq x \leq \frac{a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$ 時，

$f(x)$ 有最小值 $f(\frac{a_{\frac{n}{2}}}{2})$

(10.4) 若 $|x| \leq a$ ，則充要條件為 $-a \leq x \leq a$ ；若 $|x| \geq a$ ，則充要條件為 $x \geq a$ 或 $x \leq -a$

(B) 綜合題型分析**題型 1**

下列哪些是有理數？

- (A) 3.1416 (B) π (C) $\log_{15} \sqrt{5} + \log_{15} \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ (E) $\sqrt[3]{-27}$

解：

【答】ACE

題型 2

下列敘述何者正確？

- (A) 若 a 、 b 為異於 0 之實數，若 $a > b$ ，則 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- (B) 沒有實數 x 滿足 $|x-2| + |x+3| \leq 4$
- (C) 若 a 、 c 為有理數， b 、 d 為無理數，且 $a+b=c+d$ ，則 $a=c$ ， $b=d$
- (D) 若 $a < 0$ 、 $b < 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$
- (E) 數線上 A 點坐標為 a ， B 點坐標為 b ，滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則 P 點坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$

解：

【答】B

題型 3~數乙 105 單選 2~

考慮有理數 $\frac{n}{m}$ ，其中 $m、n$ 為正整數且 $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值（例如 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{2}{4}$ 同值，只算一個）共有幾個？ (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個

解：

【答】4

題型 4

若 $a、b$ 是實數，則下列哪些選項是正確的？

(A) 若 $a+b\sqrt{5}=0$ (B) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (C) 若 $a < b$ ，則 $a < \frac{5a+3b}{8} < \frac{3a+5b}{8}$

(D) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ (E) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}$

解：

【答】BE

題型 5~數甲 99 多選 6~

設 a 、 b 、 c 分別為函數 $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 、 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ 、 $h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}}$ 在 x 為任意正實數時的最小值。試問下列哪些選項是正確的？

- (A) $b = a^2$
- (B) $c = 2^{\frac{3}{4}}$
- (C) $f(x) + g(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $a + b$
- (D) $g(x) + h(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $b + c$

解：

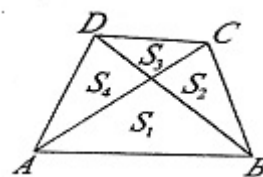
【答】BD

題型 6 ~ 台中市模擬考題~

如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ ，

S_i 表示圖中各區域之面積，則下列何者為真？ _____。

- (A) $S_1 + S_3 > S_2 + S_4$ (B) $S_1 + S_3 < S_2 + S_4$ (C) $S_1 \cdot S_3 > S_2 \cdot S_4$
- (D) $S_1 \cdot S_3 < S_2 \cdot S_4$



解：

【答】A

題型 7~數乙 103 多選 7~

三個相異實數 a 、 b 、 c 滿足 $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將 a 、 b 、 c 標示在數線上，則

(1) b 在 a 與 c 之間 (2) $c > b$ (3) 若 $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則 d 在 a 與 b 之間

(4) a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍 (5) 如果 $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則 $a \cdot b \cdot c > 0$

【答】14

題型 8

滿足絕對值不等式 $||x| - |x - 6|| \leq 2$ 的整數解 x 共有幾個？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

解：

【答】3

題型 9~學測 105 多選 7~

下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

(1) $|x| + |x-5| = 1$

(2) $|x| + |x-5| = 6$

(3) $|x| - |x-5| = 1$

(4) $|x| - |x-5| = 6$

(5) $|x| - |x-5| = -1$

解：

【答】235

題型 10

四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點 P 在

\overline{AB} 上，點 Q 在 \overline{CD} 上，若 \overline{PQ} 平分四邊形 $ABCD$ 的面積，則 \overline{PQ} 的最小值為_____。

【答】 $3\sqrt{2\sqrt{2}-2}$

(C) 單元演練(一)

1. 下列哪些是有理數？

(A) 3.1416

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\log_{10} \sqrt{5} + \log_{10} \sqrt{2}$

(D) $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

(E) $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$ 之實根

【98 學測】

2. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ ，

請問下列哪些選項是正確的？

(A) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 1$

(B) 如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數

(C) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數

(D) $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$ (n 為正整數)

(E) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數 (n 為正整數)

【99 學測】

3. 張師傅想為公司設計底面為正方形，且沒有蓋子的長方體紙盒，裡面白色，外面灰色，設在灰色部份面積為 432 平方公分限制下，要使紙盒之容積最大，他應將此無蓋長方體紙盒底面每邊設計為_____公分。 **【96 指考數甲】**
4. 坐標平面上有四個點 $O(0,0)$ 、 $A(-3,-5)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(x,y)$ ，今有一質點在 O 點沿 \overrightarrow{AO} 方向前進 \overline{AO} 距離後停在 P ，再沿 \overrightarrow{BP} 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q 。假設此質點繼續沿 \overrightarrow{CQ} 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O ，則 $(x,y)=$ _____。 **【98 學測】**
5. 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為 $(9,8)$ 及天樞的坐標為 $(7,11)$ 。依上述資訊可以推得北極星的坐標為_____。 **【101 學測】**

6. 關於下列不等式，請選出正確的選項。_____。

(1) $\sqrt{13} > 3.5$ (2) $\sqrt{13} < 3.6$ (3) $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$ (5) $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

【103 學測多選 9】

7. 設 k 為一整數。已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。

【102 學測選填 A】

8. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。

(1) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 0.\bar{6} + 0.\bar{4}$

(2) $0.\bar{72} + 0.\bar{28} = 1.\bar{1}$

(3) $0.\bar{7} + 0.\bar{3} = 1$

(4) $0.\bar{5} + 0.\bar{5} = 1.\bar{1}$

(5) $0.\bar{49} = 0.5$

【102 數乙多選 4】

9. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為 432 平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為_____公分。

【102 數甲選填 C】

~解答~

【1】(A)(C)(D) 【2】(B)(C)(D) 【3】12 【4】(-4,20) 【5】(-3,26) 【6】(1)(4) 【7】16 【8】145

【9】12

(D) 模擬試題觀摩：

1. 設實數 $k < 0$ ，則 $\sqrt{-k} \cdot \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{k^3} \cdot \sqrt{-k^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (1) k^5 (2) $-k^5$ (3) k^5i (4) $-k^5i$ (5) 1

2. a, b, c, d 為實數，下列何者恆成立？

(A) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (B) $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ (C) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \geq a + b + c + d$

(D) $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$ (E) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \leq (ac \pm bd)^2$

3. 空間中一平面 E 通過點 $P(4,1,4)$ ，且與 x, y, z 軸的正向分別交於點 A, B, C ，設

O 為原點，(1) 四面體 $OABC$ 的體積最小為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 求 $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$ 的最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

~解答~

【1】1 【2】CD 【3】(1)72 (2)25

《單元 2 多項式(一)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】何謂多項式？

型如 $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 的式子稱為多項式，其中 $a_i \in R$ 。例如： $x+3$ ， $5x+x^2-7$ ，

$\sqrt{2}x+3$ ， -5 皆為多項式。而 $\frac{7}{x+1}$ 、 $\sqrt{2x+3}$ 、 $\sin x$ 、 2^x 、 $2|x|+3$ 皆不是多項式。

即變數 x _____、_____、_____、且 n 為自然數或零。

【觀念 2】多項式的相等

(2-1) 若 (1) $a_n \neq 0$ 、 $b_m \neq 0$ ， $n=m$ (2) $a_n = b_m$ 、 $a_{n-1} = b_{m-1}$ 、 \dots 、 $a_0 = b_0$ ，則

稱此兩多項式相等，記做 $f = g$ 或 $f(x) = g(x)$ ， $\forall x \in R$ 。

(2-2) 兩多項式相等有以下的等價敘述，它們指的皆是同一件事：

(a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ 同次項對應係數相等。

(b) 任何值 a 代換 x 恒有 $f(a) = g(a)$ 則 $f = g$ ，反之顯然成立。

(c) $f(x)$ 、 $g(x)$ 不超過 n 次，只要有 $n+1$ 次以上的值代入相等，則 $f = g$

(多項式相等定理)

【觀念 3】係數問題

若 $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ 為一多項式，則

(3-1) 常數項 $a_0 =$ _____

(3-2) 各項係數之和 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n =$ _____。

(3-3) 一切奇次項之係數和 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2k-1} =$ _____。

(3-4) 一切偶次項之係數和 $a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2k-2} =$ _____。

(3-5) $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \dots =$ _____。(參考)

(3-6) $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots =$ _____。(參考)

【觀念 4】 除法原理與綜合除法的應用

(4-1) 除法定理：任給兩個多項式 $f(x)$ ， $g(x)$ 且 $g(x) \neq 0$ ，其中 $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ ；

則存在 $q(x)$ ， $r(x)$ 使得 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ ，其中 $\deg r(x) < \deg g(x)$ 。 $q(x)$ 稱為商式， $r(x)$ 稱為餘式。

(4-2) 綜合除法的應用：

(a) 以一多項式表另一多項式(多項式變形)

(b) 可用來求值：若 α 為 $x^2 + ax + b = 0$ 之一根， $f(x)$ 為一多項式，求 $f(\alpha)$ 時，可用除法求出 $Q(x)$ 、 $R(x)$ ，使 $f(x) = (x^2 + ax + b)Q(x) + R(x)$ ，則 $f(\alpha) = 0 + R(\alpha)$

(c) $f(a \pm \varepsilon)$ 之近似值：化 $f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n$ ，

再以 $a \pm \varepsilon$ 代入，適當略去後面部份可得所求。

【觀念 5】 餘式定理

(5-1) $f(x) = (x-c)Q(x) + f(c)$ (唸作 $f(x)$ 除以 $x-c$ 之餘式為 $f(c)$)

立即反應： $f(x)$ 以 $(x-c)$ 除之餘式為_____。

反過來說， $f(c)$ 的意思是_____。

(5-2) 遇到高次多項式時，則餘式定理之精神為_____。

(5-3) 餘式定理告訴我們，可以用除法求函數值。

【觀念 6】 因式定理

(6-1) $x-c \mid f(x) \Leftrightarrow f(c) = 0$

(6-2) 若 $a \neq b$ ，且 $f(a) = 0$ ， $f(b) = 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-b) \mid f(x)$

立即反應： $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，則_____。

反之，若 $f(c) = 0$ ，則 $f(x) =$ _____。

【觀念 7】 求餘式之假設法：

(7-1) $\deg f(x)$ 已確定：

(7-1-1) $\deg f(x) = 2$ ，已知 $f(a) = \alpha$ 、 $f(b) = \beta$ 、 $f(c) = \gamma$ ，

則可設 $f(x) =$ _____。

(7-1-2) $\deg f(x) = 3$ ，已知 $f(a) = \alpha$ 、 $f(b) = \beta$ 、 $f(c) = \gamma$ 、 $f(d) = \delta$ ，

則可設 $f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$ 。

(7-1-3) $\deg f(x) = 3$ ，已知 $f(a) = f(b) = \alpha$ ， $f(c) = \beta$ ， $f(d) = \gamma$ ，

則可設 $f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$ 。

(7-1-4) $\deg f(x) = 3$ ，已知 $f(a) = f(b) = f(c) = \alpha$ 、 $f(d) = \beta$ ，

則可設 $f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$ 。

(7-2) $\deg f(x)$ 未確定或次數很高：

(7-2-1) 除式是二個一次因式的乘積：

則設 $f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$ 。

(7-2-2) 除式是三個一次因式的乘積：

則設 $f(x) = \underline{\hspace{10cm}}$ 。

(7-2-3) 除式為一次乘二次型： $(x-a)(x^2+bx+c)$ ，

且 $f(x) = (x^2+bx+c)q(x) + dx + e$ ，

則設 $f(x) = (x-a)(x^2+bx+c)Q(x) + A(x^2+bx+c) + dx + e$

(7-2-4) 其他類型則善用除法原理。

【觀念 8】插值多項式

(8.1) 若給定兩點 (a, p) 、 (b, q) ， $a \neq b$ ，則通過此兩點之插值多項式是

$$f(x) = \frac{q}{b-a}(x-a) + \frac{p}{a-b}(x-b)$$

(8.2) 三點的插值多項式假設法給定三點 (a, p) 、 (b, q) 、 (c, r) 其中 a 、 b 、 c 兩兩相異，

對所找的多項函數 $f(x)$

可設為 (1) $f(x) = A + B(x-a) + C(x-a)(x-b)$ ，此稱為_____

或 (2) $f(x) = A(x-a)(x-b) + B(x-b)(x-c) + C(x-a)(x-c)$ ，

此稱為_____。

(B) 綜合題型分析**題型 1**

設 $f(x) = (a-2)x^2 - 3x + (1-2b)$ ， $g(x) = 4x^2 - (4c-5)x - 3$ ，若已知
 $f(2) = g(2)$ 、 $f(-5) = g(-5)$ 、 $f(-1) = g(-1)$ ，求 $a+b+c$ 之值為_____。

解： $\because \deg f = \deg g = 2$ ，而且 $f(2) = g(2)$ 、 $f(-5) = g(-5)$ 、 $f(-1) = g(-1)$

\therefore 由多項式相等定理可知， $f = g$ 。比較係數即得

$$\begin{cases} a-2=4 \\ 3=4c-5 \\ 1-2b=-3 \end{cases} \quad \text{可解得} \quad \begin{cases} a=6 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$

題型 2~學測 103 多選 10~

設 $f(x)$ 為實係數二次多項式，且已知 $f(1) > 0$ 、 $f(2) < 0$ 、 $f(3) > 0$ 。

令 $g(x) = f(x) + (x-2)(x-3)$ ，請選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
- (2) $y = g(x)$ 的圖形是開口向下的拋物線
- (3) $g(1) > f(1)$
- (4) $g(x) = 0$ 在 1 與 2 之間恰有一個實根
- (5) 若 α 為 $f(x) = 0$ 的最大實根，則 $g(\alpha) > 0$

解：

題型 3 ~學測 108 多選 12~

設 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 為實係數三次多項式， $g(x)$ 為實係數二次多項式。已知 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式分別為 $r_1(x)$, $r_2(x)$ 。試選出正確的選項。

- (1) $-f_1(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $-r_1(x)$
- (2) $f_1(x)+f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)+r_2(x)$
- (3) $f_1(x)f_2(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r_1(x)r_2(x)$
- (4) $f_1(x)$ 除以 $-3g(x)$ 的餘式為 $\frac{-1}{3}r_1(x)$
- (5) $f_1(x)r_2(x)-f_2(x)r_1(x)$ 可被 $g(x)$ 整除

解：

【答】125

題型 4~學測 107 多選 9~

已知多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 之餘式為 $2x+1$ 。試選出正確的選項。

- (1) $f(0)=1$
- (2) $f(1)=3$
- (3) $f(x)$ 可能為一次式
- (4) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^2-3$
- (5) $f(x)$ 可能為 $4x^4+2x^3-3$

解：

【答】235

題型 5~數乙 104 多選 6~

設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2 + g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。_____

- (1) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$
- (2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$
- (3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$
- (4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$
- (5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$

解：

【答】124

題型 6~數乙 103 多選 6~

假設多項式 $f(x) = 2 - 2x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2)g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一實係數多項式。請選出一定正確的選項。

- (1) $f(x)$ 有 $(x-1)$ 的因式
- (2) $f(x)$ 沒有 $(x+1)$ 的因式
- (3) $f(x)$ 被 $(x-2)$ 除的餘式等於 6
- (4) 0 不是 $f(x)=0$ 的根
- (5) 通過 $(0, f(0))$ 、 $(1, f(1))$ 、 $(2, f(2))$ 的最低次插值多項式為 $2 - 2x + 4x(x-1)$

解：

【答】1345

題型 7

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為 x 的多項式，若 $g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 5，且 $f(x) = (x+1)g(x) + 2$ ，則 $(f(x))^2$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式為_____。

解：

【答】 $20x + 24$

題型 8~數乙 106 單選 1~

設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 為實係數多項式函數。若 $f(1) = f(2) = 0$ 且 $f(3) = 4$ ， $a + 2b + c$ 的值是下列哪一個選項？_____

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 5

解：

【答】 4

題型 9~數乙 104 多選 6~

設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式為 $(x-2)^2 + g(x)$ ，其中 $g(x)$ 為一次多項式。請選出正確的選項。_____

(1) 若知道 $f(1)$ 及 $f(2)$ ，則可求出 $g(x)$

(2) $f(x)$ 除以 $(x-2)$ 的餘式是 $g(2)$

(3) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式是 $g(1)$

(4) $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $g(x)$

(5) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式是 $x-2+g(x)$

解：

【答】 124

(C) 單元演練(二)

1. () 若 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式 $g(x) = f(f(x))$ 除以 $(x-2)$ 所得的餘式

為 (A)3 (B)5 (C)7 (D)9 (E)11

【92 學測】

2. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 5x + 4$ ，餘式為 $x + 2$ ，除以 $x^2 - 5x + 6$ ，餘式為 $3x + 4$ ，則

多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 4x + 3$ 之餘式為_____。

【90 學測】

3. () 學生練習計算三次多項式 $f(x)$ 除以一次多項式 $g(x)$ 的餘式。已知 $f(x)$ 的三次項係數為 3，一次項係數為 2。甲生在計算時把 $f(x)$ 的三次項係數錯看成 2（其它係數沒看錯），乙生在計算時把 $f(x)$ 的一次項係數錯看成 -2（其它係數沒看錯）。而甲生和乙生算出來的餘式剛好一樣。試問 $g(x)$ 可能等於以下哪些一次式？

(A) x (B) $x-1$ (C) $x-2$ (D) $x+1$ (E) $x+2$

【95學測】

4. 設多項式 $(x+1)^6$ 除以 $x^2 + 1$ 的餘式為 $ax + b$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【92 學測補考】

5. 若多項式 $x^2 + x + 2$ 能整除 $x^5 + x^4 + x^3 + px^2 + 2x + q$ ，則 $p = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $q = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【94 學測】

6. () 設 $f(x) = ax^6 - bx^4 + 3x - \sqrt{2}$ ，其中 a, b 為非零實數，則 $f(5) - f(-5)$ 之值為

- (1) -30 (2) 0 (3) $2\sqrt{2}$ (4) 30 (5) 無法確定(與 a, b 有關)

【96 學測】

7. () 設 a, b, c 為實數，且二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 滿足 $f(-1) = -3$ ， $f(3) = -1$ ， $b^2 - 4ac < 0$ ，則下列哪些敘述為真？

- (A) $a < 0$ (B) $c < 0$ (C) $f(0) < f(1)$ (D) $f(4) < f(5)$ (E) $f(-3) < f(-2)$

【90 指考數乙】

8. () 給定二次多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ ，已知多項式 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ 除以 $f(x)$ 其餘式為 $3x + 2$ ，多項式 $x^3 + x^2 - x - 1$ 除以 $f(x)$ 其餘式為 $4x + 1$ ，請選出正確的選項。(A) $a = 3$ (B) $b = -1$ (C) 方程式 $f(x) = 0$ 無實根

- (D) $f(x)$ 的極小值為 $\frac{5}{4}$ (E) $f(x)$ 除以 $(x+3)$ 其餘式為 1 【97 指考數乙】

9. () 設 $a < b < c$ 。已知實係數多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y = g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸相交於 $(b, 0)$ 、 $(c, 0)$ 兩點。

請選出 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形可能的選項。

- (1) 水平直線
- (2) 和 x 軸僅交於一點的直線
- (3) 和 x 軸無交點的拋物線
- (4) 和 x 軸僅交於一點的拋物線
- (5) 和 x 軸交於兩點的拋物線

【學測 102 多選 9】

10. () 設 a, b, c 為實數，且二次多項式 $f(x) = ax(x-1) + bx(x-3) + c(x-1)(x-3)$ 滿足 $f(0) = 6$ 、 $f(1) = 2$ 、 $f(3) = -2$ 。請問 $a + b + c$ 等於下列哪一個選項？

- (1) 0 (2) $\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $-\frac{4}{3}$

【數乙 102 單選 1】

11. () 有一條拋物線位於坐標平面之上半面（即其 y 坐標 ≥ 0 ），並與 x -軸、直線 $y = x - 1$ 、直線 $y = -x - 1$ 相切。下列敘述何者正確：

- (1) 此拋物線的對稱軸必為 y -軸。
- (2) 若此拋物線對稱軸為 y -軸，則其焦距為 1。（註：拋物線的焦距為焦點到頂點的距離）
- (3) 此拋物線的頂點必在 x -軸上。
- (4) 有不只一條拋物線滿足此條件。

【數乙 102 單選 1】

12. () 考慮實數 a, b, c ，其中 $a \neq 0$ 。令 Γ 為 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形。

試選出正確的選項。

- (1) 若 $a > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
- (2) 若 $a < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
- (3) 若 $b^2 - 4ac > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
- (4) 若 $c > 0$ ，則 Γ 會通過第一象限
- (5) 若 $c < 0$ ，則 Γ 會通過第一象限

【數乙 106 多選 4】

13. () 設 $f(x) = x^2 + a(1 - x^2)$ 為一實係數多項式函數， a 為常數。下列敘述何者正確：

- (1) 不論 a 是何值， $f(x)$ 的函數圖形都不可能是直線。
- (2) 不論 a 是何值，若 $f(x)$ 有極值，則極值都等於 a 。(註：極大值與極小值統稱極值)
- (3) 0 有可能是 $f(x)$ 的極大值。
- (4) 若 $a \neq 0$ ，則 $f(x) = 0$ 無重根。

【數甲 94 多選 4】

~解答~

【1】E 【2】 $5x - 2$ 【3】(A)(C)(E) 【4】 $-8, 0$ 【5】 $3, 8$ 【6】4 【7】ABCE 【8】AE 【9】45
 【10】2 【11】24 【12】14 【13】24

(D) 模擬試題觀摩

1. 兩多項式 $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + 7x^7$ 與 $g(x) = 9 + 8x + 7x^2 + 6x^3 + \cdots + 2x^7$ ，
則 $f(x)$ 與 $g(x)$ 乘積中， x^{10} 項的係數為_____。
2. 設實係數多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - 3x + 2$ 得商式為 $Q(x)$ ，餘式為 $-2x + 3$ ，則下列哪些敘述是正確的？_____。
- (A) 方程式 $f(x) = 0$ 在區間 $(1, 2)$ 必有一實根
 (B) 若 $f(3) = 1$ ，則 $Q(x)$ 除以 $2x - 6$ 的餘式為 2
 (C) 若 $f(x)$ 有因式 $2x - 3$ ，則 $Q(x)$ 也有因式 $2x - 3$
 (D) 若 $h(x)$ 為 $f(x)$ 與 $Q(x)$ 的最高公因式，則 $\deg h(x) \leq 1$
 (D) 設 a, b 為任意非零實數，則 $f(a + bi) \times f(a - bi)$ 必為正實數
3. 設多項式函數 $f(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 30x + 11$ 。為了估計 $f(1.99)$ 之近似值正確到小數點後第四位，我們令 $f(x) = a + b(x - 2) + c(x - 2)^2 + d(x - 2)^3 + e(x - 2)^4$ ，其中 a, b, c, d, e 均為實數，則下列何者為真？_____。
- (A) $a = 3$ (B) $b = 6$ (C) $c = 1$ (D) $f(1.99)$ 準確到小數點後第四位的近似值為 3.0601
 (E) $f(1.99)$ 準確到小數點後第四位的近似值為 2.9401。

4. 設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為一實係數多項式函數；已知 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 2$ 及 $x^2 + x - 2$ 之餘式分別為 $x + 2$ 與 $3x + 4$ ，下列選項何者正確？_____。
- (A) $a = \frac{1}{2}$ (B) $b = \frac{1}{2}$ (C) $a + b + c + d = 7$
 (D) $y = f(x)$ 與 x 軸有交點 (E) 若 $g(x) = 7$ ，則 $y = f(x)$ 與 $y = g(x)$ 之圖形交於 $(0, 7)$
5. 設 $f(x)$ 為一個四次多項式，若 $f(x)$ 以 $(x-1)^3$ 除之餘式為 3，以 $x-2$ 除之餘式為 6，以 $x+2$ 除之餘式為 30，則 $f(0) =$ _____。
6. 求 $(x^2 - 34x + 288)(2x^3 - 38x^2 + 37x - 18)$ 除以 $x-17$ 之餘式為_____。
7. 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2x + 3$ ，商為 $g(x)$ ，餘式為 $2x - 3$ ，又 $x+1$ 為 $f(x)+1$ 的因式，則 $g(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為_____。

8. 設多項式 $f(x) = (x+1)^8$ ，則 $f(x)$ 除以多項式 $x^2 - 1$ 的餘式為_____。

9. $19^5 - 17 \times 19^4 - 37 \times 19^3 - 18 \times 19^2 + a \times 19 + 2 = 40$ ，則 $a =$ _____。

~解答~

【1】110 【2】全 【3】ABCE 【4】ACD 【5】2 【6】545 【7】2 【8】 $128x+128$ 【9】-17

《單元3 多項式(二)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念1】虛數 $i = \sqrt{-1}$ 的性質

(1.1) $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ 為每四次一循環。

(1.2) $i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \underline{\hspace{2cm}}$

(1.3) $(1+i)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $(1-i)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $(1+i)(1-i) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【觀念2】複數

(2.1) $a, b \in R$ 凡形如 $a+bi$ 的數稱為複數。其中 a 稱為 $\underline{\hspace{2cm}}$, b 稱為 $\underline{\hspace{2cm}}$

我們以集合 $C = \{a+bi | a, b \in R\}$ 表示複數系。當 $a=0, b \neq 0$ 時稱 bi 為純虛數。

當 $a \neq 0, b=0$ 時則為實數，故 $R \subset C$ 。

(2.2) 設 $a, b, c, d \in R$ $a+bi = c+di \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2.3) A. 共軛複數：設 $a, b \in R$ 則 $a+bi$ 與 $a-bi$ 互稱為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

記為 $\overline{a+bi} = a-bi$, $(a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \in R$

B. 共軛複數的性質：

(i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ (ii) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$ (iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

(iv) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ (v) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ (vi) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

(2.4) 設 $a, b, c, d \in R$

$$(1) (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(2) (a+bi) - (c+di) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) (a+bi) \cdot (c+di) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(4) \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

【觀念3】多項式方程式

(3.1) (A) 定義： $f(x)$ 是一個 n 次多項式，我們稱 $f(x)=0$ 為 n 次多項方程式。

(B) 找 x 使得 $f(x)=0$ ，這就是解 n 次方程式 $f(x)=0$ 的問題，如果一個數 a 滿足

$f(a)=0$ ，就稱 a 是 $f(x)=0$ 的根或解或零點。

(3.2) 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解法 (a) _____ (b) _____ (c) _____。

(3.3) 實係數一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ，與判別式 $D=b^2-4ac$ 的關係：

(a) 當 $D>0$ 時，方程式有 _____，即 _____。

(b) 當 $D=0$ 時，方程式有兩相等實根(兩重根)，即 _____。

(c) 當 $D<0$ 時，方程式無實根，但有兩共軛複數根，即 _____。

【觀念 4】多項式方程式根與係數的關係

(4.1) 設一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α 、 β ，則

$$\alpha + \beta = \text{_____}、\alpha\beta = \text{_____}。$$

(4.2) 設一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三根為 α 、 β 、 γ ，則

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{_____}、\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \text{_____}、\alpha\beta\gamma = \text{_____}。$$

(4.3) 常見的求值公式：(a) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ (b) $(\alpha - \beta)^2 = \text{_____}$

$$(c) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

【觀念 5】有理根的判別法

(5.1) 牛頓一次因式檢驗法：

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 是 整係數 的 n 次多項式， a, b 是整數且 a 與 b 互質，
若 $ax - b$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $a | a_n, b | a_0$ 。(但逆敘述不真)

(5.2) 高引定理：

設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 整係數 的多項式的 n 次 a, b 是整數且 a 與 b 互質，
若 $ax - b$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $(a - b) | f(1)$ ， $(a + b) | f(-1)$ (但逆敘述不真)

【觀念 6】虛數根成對定理

(6.1) 虛根共軛性質：若 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 為一 實係數 n 次多項式， z 為一複數，
則 $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ 。

(6.2) 虛根成對定理：設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ 為一 實係數 n 次方程式，且複

數 z 為 $f(x)=0$ 的一根，則共軛複數 \bar{z} 亦為 $f(x)=0$ 的一根。

【觀念 7】二次無理根成對定理

設有理係數 n 次方程式 $f(x)=0$ ， $n \geq 2$ ，若有一個二次無理根 $a+b\sqrt{m}$ ，其中 a 、 b 、 m 皆為有理數， $b \neq 0$ ， \sqrt{m} 為無理數，則 $a-b\sqrt{m}$ 為 $f(x)=0$ 之另一根。

【說明】

所謂的二次無理根就是型如 $a-b\sqrt{m}$ 的根，顧名思義，就是可由它做出一個整係數二次方程式並以它為根。

【觀念 8】勘根定理

(8.1) 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $a < b$ 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，則必有一根介於 a 與 b 之間。

(8.2) 若 $a < b$ ， k 重根算 k 個根，則

(a) $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow a$ 、 b 間有奇數個根。

(b) $f(a) \cdot f(b) > 0 \Rightarrow a$ 、 b 間無實根或有偶數個實根。

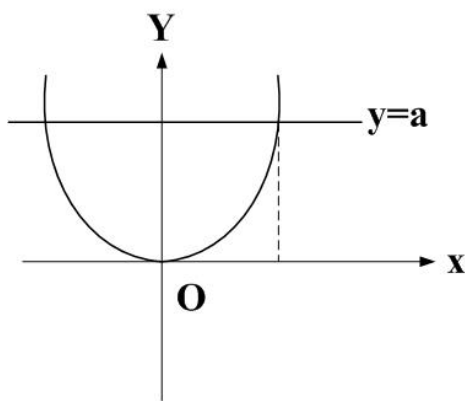
(8.3) 利用勘根定理可勘查無理根位置，以求無理根之近似值。

【觀念 9】 a 的 n 次方根

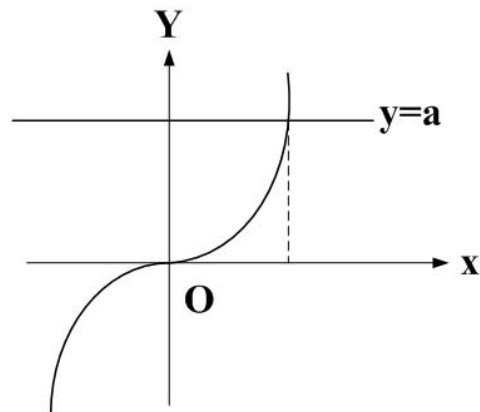
對正整數 $n \geq 2$ 與正實數 a ，方程式 $x^n = a$ 的正根稱為 a 的 n 次方根，而表示為_____。

這 n 次方根可以由 $y = x^n$ 的函數圖形得到：如下圖所示，水平線 $y = a$ 與 $y = x^n$ 的函數圖形在第一象限交點的 x 坐標。

(9.1) n 是偶數：



(9.2) n 是奇數：



(B) 綜合題型分析**題型 1**

設 a 、 b 、 c 為複數，下列何者為真？

- (A) 若 $ab = bc = ca = 0$ ，則 $a = b = c = 0$
- (B) 若 $a+b$ 、 $b+c$ 、 $c+a$ 均為實數，則 a 、 b 、 c 均為實數
- (C) 若 $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ，則 $a = b = c = 0$
- (D) 若 $a+b > c$ ，則 $a+b-c > 0$
- (E) 若 $a+b-c > 0$ ，則 $a+b > c$

解：

【答】(B)(D)

題型 2~學測 104 多選 6~

設 $f(x)$ 是首項係數為 1 的實係數二次多項式。請選出正確的選項。

- (1) 若 $f(2) = 0$ ，則 $x-2$ 可整除 $f(x)$
- (2) 若 $f(2) = 0$ ，則 $f(x)$ 為整係數多項式
- (3) 若 $f(\sqrt{2}) = 0$ ，則 $f(-\sqrt{2}) = 0$
- (4) 若 $f(2i) = 0$ ，則 $f(-2i) = 0$
- (5) 若 $f(2i) = 0$ ，則 $f(x)$ 為整係數多項式

解：

【答】145

題型 3~數甲 104 多選 5~

設實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(1+i)=5$ 與 $f(i)=10$ (其中 $i=\sqrt{-1}$)，且 $f(x)$ 除以 $(x^2-2x+2)(x^2+1)$ 的餘式為 $g(x)$ 。請選出正確的選項。

- (1) $g(1+i)=5$ (2) $f(-i)=-10$ (3) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的餘式是一次多項式
 (4) $g(x)$ 除以 x^2-2x+2 的商式是 $2x+1$ (5) $g(x)=2x^3-7x^2+2x+3$

解：

【答】14

題型 4~學測 105 多選 10~

設 a 、 b 、 c 皆為正整數，考慮多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+2$ 。

請選出正確的選項。_____

- (1) $f(x)=0$ 無正根 (2) $f(x)=0$ 一定有實根 (3) $f(x)=0$ 一定有虛根
 (4) $f(1)+f(-1)$ 的值是偶數
 (5) 若 $a+c>b+3$ ，則 $f(x)=0$ 有一根介於 -1 與 0 之間

解：

【答】145

題型 5

若 α 、 β 、 γ 是一元三次方程式 $2x^3 - 3x^2 - 12x + 16 = 0$ 的三個根，則

$(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2)(\gamma^2 + \gamma\alpha + \alpha^2)$ 的值為_____。

解：

【答】324

題型 6~學測 100 多選 13~

設 $f(x) = x(x-1)(x+1)$ ，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$ (2) $f(x) = 2$ 有整數解 (3) $f(x) = x^2 + 1$ 有實數解

(4) $f(x) = x$ 有不等於零的有理數解 (5) 若 $f(a) = 2$ ，則 $f(-a) = 2$

解：

【答】3

題型 7

設 a 、 b 、 c 、 d 皆為非零實數， $i = \sqrt{-1}$ ，若 $f(x) = x^3 + ax^2 + 53x + b = 0$ 有兩複數根 $c+i$ 、 $2+di$ ，則數對 $(a,b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

【答】 $(-16, -60)$

題型 8~學測 106 選填 C~

若 a 為正整數且方程式 $5x^3 + (a+4)x^2 + ax + 1 = 0$ 的根都是有理根，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

【答】7

題型 9

設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 為實係數三次多項式，則下列選項哪些是正確的？_____。

- (A) $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸至少交於一點
- (B) $f(3 - \sqrt{5}) = -11 + \sqrt{7}$ ，則 $f(3 + \sqrt{5}) = -11 - \sqrt{7}$
- (C) 若 $-\frac{3}{2}$ 為方程式 $f(x) = 0$ 的一根，則 $2|a$ 且 $(-3)|b$
- (D) 若方程式 $f(x) = 0$ 有一實根為 0 及兩虛根，則 $a \times c > 0$
- (E) 若 $f(2) \times f(3) > 0$ ，則方程式 $f(x) = 0$ 在 2 與 3 之間可能有實根。

解：(A)對：根據虛根成對定理，僅可能存在 1 個或 3 個實根。

(B)錯：必須是有理係數才對

(C)錯：多項式必須是「整係數」才行。

(D)對：假設另二虛根分別為 $\alpha + i\beta$ 及 $\alpha - i\beta$ ，其中 $\alpha, \beta \in R$

$$\text{故 } \frac{c}{a} = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) + 0 \times (\alpha + i\beta) + 0 \times (\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \therefore a \times c > 0$$

(E)對：可能無實根或存在偶數個實根。

【答】(A)(D)(E)

題型 10

設多項式 $f(x) = 12x^3 - 8x^2 - 23x + 11$ ，則下列選項哪些是正確的？_____

- (A) $f(x) = 0$ 在 -2 與 -1 之間有一實根 (B) $f(x) = 0$ 在 2 與 3 之間有一實根
- (C) $f(x) = 0$ 有兩正根一負根 (D) 沒有實數 x 滿足 $f(f(x)) = 0$ (E) $f(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}) < 0$

解：(A)對： $\because f(-2)f(-1) = -71 \times 14 < 0 \therefore$ 根據勘根定理可知此敘述為真

(B)錯： $\because f(2)f(3) = 29 \times 194 > 0 \therefore$ 在 2 與 3 之間不一定存在實根

(C)對： $\because f(-2)f(-1) < 0$ 且 $f(0)f(1) < 0$ 且 $f(1)f(2) < 0$

\therefore 在 -2 與 -1 之間，0 與 1 之間，1 與 2 之間各存在一實根。

(D)錯： $\because f(f(0)) = f(11) > 0$ 且 $f(f(1)) = f(-8) < 0 \therefore$ 由勘根定理可知

存在實數 $x \in (0, 1)$ 使得 $f(f(x)) = 0$ 。

(E)錯：由綜合除法可看出 $f(x) > 0, \forall x \geq 2$

【答】(A)(C)

(C) 單元演練 (三)

1. 方程式 $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ 有多少個實根? _____

- (A) 0 個 (B) 1 個 (C) 2 個 (D) 3 個 (E) 4 個

【91 學測補考】

2. () 下列哪一個選項是方程式 $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ 的解? (註: $i = \sqrt{-1}$)

- (1) $-2i$ (2) $-i$ (3) i (4) 2 (5) 4

【學測 108 單選 2】

3. () 設 $f(x)$ 為三次實係數多項式, 且知複數 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之一解。

試問下列哪些敘述是正確的? _____

- (A) $f(1-i)=0$ (B) $f(2+i) \neq 0$ (C) 沒有實數 x 滿足 $f(x)=x$
 (D) 沒有實數 x 滿足 $f(x^3)=0$ (E) 若 $f(0) > 0$ 且 $f(2) < 0$, 則 $f(4) < 0$.

【學測 93 多選 11】

4. () 設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且其最高次項係數為 1, 已知

$f(1)=1, f(2)=2, f(5)=5$, 則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根? _____

- (A) $(-\infty, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 5)$ (E) $(5, \infty)$

【學測 96 多選 11】

5. 設 $f(x)$ 為滿足下列條件的最低次實係數多項式： $f(x)$ 最高次項的係數為 1，且 $3-2i$ 、 i 、 5 皆為方程式 $f(x)=0$ 的解（其中 $i^2=-1$ ）。則 $f(x)$ 之常數項為_____。

【學測 99 選填 B】

6. () 設 $f(x)=x(x-1)(x+1)$ ，請問下列哪些選項是正確的？

- (A) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$ (B) $f(x)=2$ 有整數解 (C) $f(x)=x^2+1$ 有實數解
 (D) $f(x)=x$ 有不等於零的有理數解 (E) 若 $f(a)=2$ ，則 $f(-a)=2$

【學測 100 多選 13】

7. () 設 $f(x)=x^4-5x^3+x^2+ax+b$ 為實係數多項式，且知 $f(i)=0$ (其中 $i^2=-1$)。請問下列哪些選項是多項式 $f(x)=0$ 的根？(A) $-i$ (B) 0 (C) 1 (D) -5 (E) 5

【學測 101 多選 8】

8. 設 k 為一整數。若方程式 $kx^2 + 7x + 1 = 0$ 有兩個相異實根，且兩根的乘積介於 $\frac{5}{71}$ 與 $\frac{6}{71}$ 之間，則 $k =$ _____。 【學測 92 選填 F】

9. () 假設 a 、 b 是整數，且 $b \neq 0$ 。已知 $c = \frac{a}{3} + \frac{b\sqrt{2}}{3}i$ 是實係數一元二次方程式 $x^2 + kx + 1 = 0$ 的一個解。請問下列哪些選項是正確的？
- (A) $\frac{1}{c}$ 是上述方程式的另外一個解 (B) $\frac{1}{c} = \frac{a}{3} - \frac{b\sqrt{2}}{3}i$ (C) $c + \frac{1}{c} = k$
 (D) k 一定是整數 (E) a 一定是奇數 【數乙 96 多選 6】

10. () 設 $P(x)$ 是一個五次實係數多項式。若 $P(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式是 2，且商 $Q(x)$ 是一個係數均為正數的多項式，試問下列哪些選項是正確的？_
- (1) $P(x) = 0$ 與 $Q(x) = 0$ 有共同的實根
 (2) 3 是 $P(x) = 2$ 唯一的實根
 (3) $P(x)$ 不能被 $x-4$ 整除
 (4) $P(x) = 0$ 一定有小於 3 的實根
 (5) $P(x)$ 除以 $(x-3)(x+3)$ 的餘式也是 2

【數甲 96 多選 5】

11. () 假設 a 、 b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

- (1) 在 x 軸上
- (2) 在 y 軸上
- (3) 在第一象限
- (4) 在第四象限
- (5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

【數甲 105 單選 4】

12. () 設 $f(x)$ 為二次實係數多項式，已知 $f(x)$ 在 $x=2$ 時有最小值 1 且 $f(3)=3$ 。請問 $f(1)$ 之值為下列哪一選項？

- (1) 5 (2) 2 (3) 3 (4) 4 (5) 條件不足，無法確定

【學測 105 單選 1】

13. () 已知實係數多項式方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ 的三根相同，請問 b 的值等於下列哪一個選項？

- (1) 6 (2) 8 (3) 10 (4) 12 (5) 14

【數乙 101 單選 1】

14. 設 a 、 b 均為正整數，而方程式 $x^2-ax+15=0$ 與 $x^2-bx+3b-1=0$ 有一共同根，且此共同根為質數，則 $b=$ _____。

【數乙 101 選填 A】

~解答~

【1】C 【2】1 【3】ABE 【4】BD 【5】-65 【6】C 【7】ABE 【8】12 【9】ABE 【10】34 【11】1

【12】3 【13】4 【14】12

(D) 模擬試題觀摩

1. 設 $a \in R$ ，對任意實數 t ；方程式 $(x-6)(x-2)+t(x-a)=0$ 恆有實根，則 a 的範圍為何？_____

- (A) $3 \leq a \leq 7$ (B) $2 \leq a \leq 6$ (C) $1 \leq a \leq 5$ (D) $0 \leq a \leq 2$ (E) $-1 \leq a \leq 1$

2. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(i)=0 (i=\sqrt{-1})$ ，則函數 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸有多少個交點？_____

- (A) 0個 (B) 1個 (C) 2個 (D) 3個

3. 設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且知複數 $\sqrt{3}i$ 為 $f(x)=0$ 的一根，則下列敘述哪些正確？_____

- (A) $f(-\sqrt{3})=0$ (B) $f(x)$ 除以 x^2+3 的餘式為一次式
 (C) $f(x)=0$ 恰有一實根 (D) 若 $f(1)>0$ 且 $f(2)<0$ ，則 $f(3)<0$
 (E) $f(x)=0$ 有一個負實根

4. 若 a 、 b 、 c 均為整數，且方程式 $f(x)=x^3-ax^2+8x+a+3=0$ 與

$g(x)=x^3+bx^2+cx+(a-2)=0$ 有共同的正有理根，則 $a=$ _____。

5. 已知方程式 $2x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 3x - 3 = 0$ 有一根 $1 + \sqrt{2}$ ，試求此方程式之所有無理根之和為_____。

6. 設 $f(x)$ 為實係數四次多項式，若已知 $f(3-i) = 0$ 且 $f(5) > 0$ ， $f(10) < 0$ ，則 $y = f(x)$ 的函數圖形與 x 軸有幾個交點？_____。

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 (E)4

7. 實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)，則下列何者正確？_____

(A) 若實數 m 與 n 之間存有 $f(x) = 0$ 之根，則 $f(m) \cdot f(n) < 0$

(B) 若 $2 + \sqrt{3}$ 為 $f(x) = 0$ 之一根，則 $2 - \sqrt{3}$ 亦為 $f(x) = 0$ 之一根

(C) 若 $f(2+3i) = 5-6i$ ，則 $f(2-3i) = 5+6i$

(D) $f(x) = 0$ 至少有一實根

(E) $y = f(x)$ 之圖形可能與 x 軸無交點

8. 設 $f(x)$ 為一實係數多項式，已知 $3i$ 與 $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ 為 $f(x)=0$ 之兩根，則下列敘述何者為真？_____。
- (A) $f(-3i)=0$
- (B) $f(\frac{\sqrt{2}-1}{3})=0$
- (C) 若 $f(x)$ 的次數為偶次，則 $f(x)=0$ 至少有兩實根
- (D) 若 $f(1)\times f(2)>0$ ，則方程式 $f(x)=0$ 在 1、2 之間沒有實根
- (E) 若 $f(-1)\times f(-2)<0$ ，則方程式 $f(x)=0$ 在 -2、-1 之間恰有一實根。
9. $f(x)=0$ 為實係數多項方程式， $\deg f(x)\geq 3$ ， a 、 b 均為實數，則下列敘述何者正確？_____。
- (A) 若 $f(a)f(b)<0$ ，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間恰有一實根
- (B) 若 $f(a)f(b)>0$ ，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間恰沒有實根
- (C) 若 $2+\sqrt{3}$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 $2-\sqrt{3}$ 也是 $f(x)=0$ 之另一根
- (D) 若 $2i+1$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 $2i-1$ 也是 $f(x)=0$ 之另一根
- (E) 若 $f(-x)=f(x)$ ，則 $y=f(x)$ 的函數圖形對稱於 y 軸

~解答~

【1】B 【2】B 【3】CD 【4】7 【5】5 【6】C 【7】CD 【8】AC 【9】E

《單元4 多項式(三)~指對數(一)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念1】一元一次不等式

- (1) 若 $a > 0$ ，則 $ax > b$ 之解為 $x > \frac{b}{a}$ ；
- (2) 若 $a < 0$ ，則 $ax > b$ 之解為 $x < \frac{b}{a}$

【觀念2】一元二次不等式

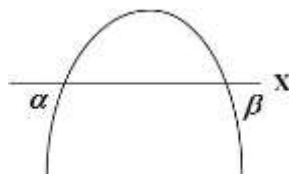
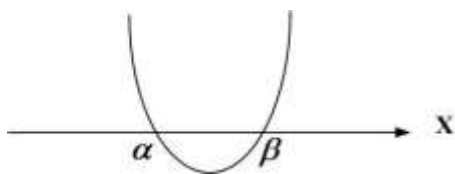
(2.1) $\alpha < x < \beta \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) < 0$

(2.2) 設 $\alpha < \beta$ ，則 $x < \alpha$ 或 $x > \beta \Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) > 0$

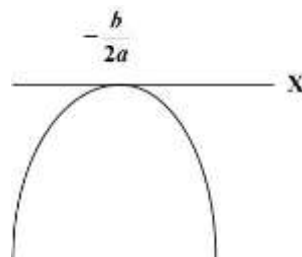
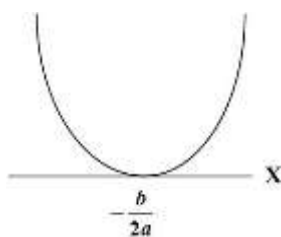
【口訣】大於在兩邊，小於在中間

(2.3) 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $a \neq 0$ ， $D = b^2 - 4ac$

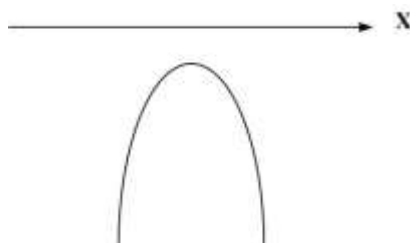
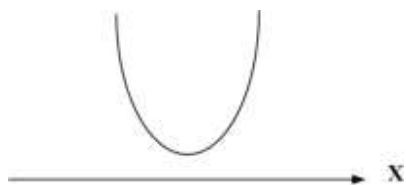
(a) 若 $D > 0$ ，則 $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ，其中 $\alpha < \beta$



(b) 若 $D = 0$ ，則 $f(x) = a(x-\alpha)^2$ ，其中 $\alpha = -\frac{b}{2a}$

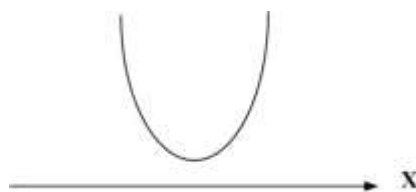


(c) 若 $D < 0$ ：當 $a > 0$ 時 $f(x)$ 恆正；當 $a < 0$ 時 $f(x)$ 恆負。



【觀念 3】二次函數的恆正與恆負

(3.1) $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a > 0, D < 0$



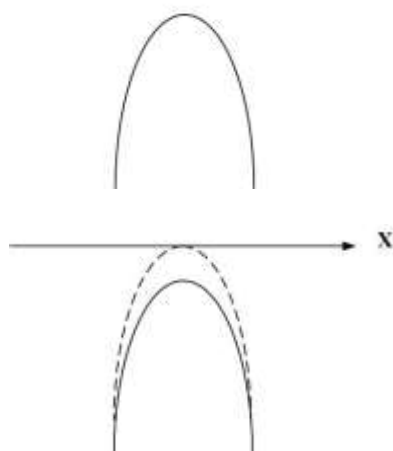
(3.2) $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a > 0, D \leq 0$



(3.3) $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a < 0, D < 0$



(3.4) $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a < 0, D \leq 0$



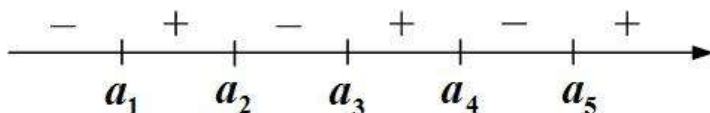
【觀念 4】高次多項不等式

設 $f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)(x - a_5)$ 且 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ，則

(4.1) 不等式 $f(x) > 0$ 之解為 $x > a_5$ 或 $a_3 < x < a_4$ 或 $a_1 < x < a_2$ 。

(4.2) 不等式 $f(x) < 0$ 之解為 $x < a_1$ 或 $a_2 < x < a_3$ 或 $a_4 < x < a_5$ 。

【圖示】



【觀念 5】簡易分式不等式

設 $f(x), g(x)$ 表多項式

(5.1) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ，則 $f(x)g(x) > 0$ ；反之亦成立。

(5.2) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ ，則 $f(x)g(x) < 0$ ；反之亦成立。

(5.3) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ ，則 $f(x)g(x) \geq 0$ ，但_____；反之亦成立。

(5.4) 若 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ ，則 $f(x)g(x) \leq 0$ ，但_____；反之亦成立。

【觀念 6】指數律

(6.1) $a, b \in R$ ， $m, n \in N$ ，則

(a) _____ (b) _____ (c) _____

(6.2) (a) 若 $a \neq 0$ ，則定義 $a^0 = 1$

(b) 若 $a \neq 0$ ， $n \in N$ 則定義 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(c) 若 $a \neq 0, b \neq 0$ ， $m, n \in Z$ 亦滿足指數律： $a^m a^n = a^{m+n}$ ， $(a^m)^n = a^{mn}$ ， $(ab)^n = a^n b^n$

(6.3) 當 $a > 0$ ， $m, n \in Z$ ， $n > 0$ ，則定義 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ， $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

由根數的性質可知，在有理指數之下亦滿足指數律。

【觀念 7】實數指數的次序性

設 $a > 0$ ， $\alpha, \beta \in R$ ，且 $\alpha > \beta$ ；則

(7.1) 若 $a > 1$ ，則_____。亦即，此時 a^x 為_____。

(7.2) 若 $0 < a < 1$ ，則_____。亦即，此時 a^x 為_____。

【觀念 8】指數方程式

(8.1) 同底型：形如 $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 的形式時，則稱為同底型；其中 $a > 0$ ， $a \neq 1$ 。

(8.2) 準二次型：形如 $p[a^{f(x)}]^2 + q[a^{f(x)}] + r = 0$ ，其中 $a > 0$ ， $a \neq 1$ 。

【解法】令 $a^{f(x)} = t$ ，則原式變為 $pt^2 + qt + r = 0$ ，先解出 t ，再由 $a^{f(x)} = t$ 解出 $f(x)$

(8.3) 聯立型：見例題。

【觀念 9】指數不等式

(9.1) 兩大題型：_____，_____。

(9.2) 原理：

(a) 若 $a > 1$ ，則 $a^x > a^y \Rightarrow x > y$ (嚴格遞增)

(b) 若 $0 < a < 1$ ，則 $a^x > a^y \Rightarrow x < y$ (嚴格遞減)

(B) 綜合題型分析**題型 1 ~97.指考數乙~**

請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a ，使得選項裡面所有的數都同時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ ？

- (A) $-1, 0$
 (B) $1, 2, 3, \dots$ (所有的正整數)
 (C) $-3, -4, -5, \dots$ (所有小於 -2 的整數)
 (D) $97, 2008$
 (E) $-\pi, \pi$ (π 是圓周率)

解：

【答】(A)(D)

題型 2 ~數乙 99 多選 3~

關於多項式不等式：

$$x^2(x+5)(x+1)(x-4)(x-7) < (2x-3)(x+5)(x+1)(x-4)(x-7),$$

下列哪些選項是它的一個解？ _____ (1) -2π (2) $-\pi$ (3) π (4) 2π

解：

【答】24

題型 3

關於不等式的解，下列選項哪些是正確的？_____

(A) $\frac{x+1}{x^2-x+1} > 0$ 的解與 $x+1 > 0$ 的解相同 (B) $(x-1)^4(x+2)(x-3) \leq 0$ 的解為 $-2 \leq x \leq 3$

(C) $\frac{1}{x} < 0$ 的解為 $x > 1$ (D) $\frac{x^2+2x+1}{x+1} \geq 0$ 的解與 $x+1 \geq 0$ 的解相同

(E) $(x-1)^5(x+2)(x-3)^3 < 0$ 的解與 $(x-1)(x+2)(x-3) < 0$ 的解相同。

解：

【答】(A)(B)(E)

題型 4

設 $f(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 3$ ，則下列敘述哪些正確？_____

(1) $f(3^x) = 0$ 恰有一個正實根

(2) $x^{10}f(x) + f(x^2) + f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘數為 18

(3) 不等式 $f(x) \geq 0$ 與 $\frac{5x-3}{(x-1)^2} \geq 0$ 的解集合相同

(4) $f(\log_{16} 12) > 0$

(5) 若 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 為鈍角且 $\sin A$ 為 $f(x) = 0$ 的一個有理根，

$$\text{則 } \sin(270^\circ - A) + \sin(360^\circ - A) = -\frac{1}{5}$$

解：

【答】24

題型 5 ~ 數甲 103 單選 3~

請問指數方程式 $2^{10^x} = 10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？_____

($\log 2 \approx 0.3010$ 、 $\log 3 \approx 0.4771$ 、 $\log 7 \approx 0.8451$)

- (1) 1.1 (2) 1.2 (3) 1.3 (4) 1.4 (5) 1.5

解：

【答】3

題型 6 ~ 學測 102 單選 2~

令 $a = 2.6^{10} - 2.6^9$ ， $b = 2.6^{11} - 2.6^{10}$ ， $c = \frac{2.6^{11} - 2.6^9}{2}$ ，請選出正確的大小關係：_____

- (A) $a > b > c$ (B) $a > c > b$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$ (E) $b > b > a$

解：

【答】4

題型 7 ~ 學測 93 單選 2~

() 下列選項中的數，何者最大？ [其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$]

- (1) 100^{10} (2) 10^{100} (3) 50^{50} (4) $50!$ (5) $\frac{100!}{50!}$

解：

【答】2

題型 8~數乙 105 單選 6~

設 $a = 10^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$, $b = a^{\sqrt{2}}$ 。請選出正確的選項。_____

- (1) $1 < a$ (2) $a < \sqrt{3}$ (3) $a^2 < b^{\sqrt{3}}$ (4) $10^{0.4} < b < 10^{0.5}$ (5) $(ab)^{\sqrt{2}} < 10$

解：

【答】134

題型 9 試題觀摩

設 $0 \leq x \leq 2$, $f(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 5$,

當 $x =$ _____ 時, $f(x)$ 有最大值為 _____ ;

當 $x =$ _____ 時, $f(x)$ 有最小值為 _____ 。

解： 1° 令 $2^x = t$, 則 $1 \leq t \leq 2^2 = 4$, $f(t) = \frac{1}{2}t^2 - 3t + 5 = \frac{1}{2}(t^2 - 6t + 9) + 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{1}{2}$

2° 當 $t = 3$ 時, $f(t)$ 有最小值 $\frac{1}{2}$

當 $t = 1$ 時, $f(t)$ 有最大值 $\frac{5}{2}$

3° 當 $t = 3$ 時, $x = \log_2 3$; 當 $t = 1$ 時, $x = 0$

題型 10 試題觀摩

設 $f(x) = 2(9^x + 9^{-x}) - 5(3^x + 3^{-x})$, $t = 3^x + 3^{-x}$, 則

- (1) t 的範圍為 _____ (2) $f(x) =$ _____ (以 t 表之) (3) $f(x)$ 之最小值為 _____ 。

解：

1° 令 $3^x + 3^{-x} = t$, 由算幾不等式可知 $t \geq 2$

則 $f(t) = 2(t^2 - 2) - 5t = 2t^2 - 5t - 4 = 2\left(t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{25}{16}\right) - \frac{25}{8} - 4 = 2\left(t - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{57}{8}$

2° 當 $t = 2$ 時, $f(t)$ 有最小值 -6

3° $t = 2$, 即 $3^x + 3^{-x} = 2$, 可解得 $x = 0$

(C) 單元演練 (四)

題	目
----------	----------

1. () 已知 $f(x)$ 為一個實係數三次多項式，其三次項係數為 1。若不等式 $f(x) > -2$ 的解為 $0 < x < 1$ 或 $x > 1$ ，則下列哪些 x 的值滿足不等式 $f(x) > 0$? _____

- (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $\frac{5}{2}$ (5) 3 .

2. () 選出與不等式 $(x-1)(x-2) > 0$ 有相同的解之選項：_____

- (1) $(1-x)(x-2) > 0$ (2) $\frac{x-1}{x-2} > 0$ (3) $(x-1)(x-2)(x-3)^2 > 0$
 (4) $(x-1)(x-2)(-x^2+2x-5) < 0$ (5) $(x-1)^3(x-2)^5 > 0$

3. () 設 $f(x) = \frac{(2^x - 128)(3^x - 1)(6^x + 6)}{(5^x - 125)(2^{-x} - 4)}$ ，若 $f(a) < 0$ ，則 a 可以是下列何數? _____

- (1) -3 (2) 2 (3) $\sqrt{20}$ (4) $\sqrt{40}$ (5) $\sqrt{50}$.

4. 設 $f(x) = 3^x + 3^{-x}$,

(1) 若 α, β 為 $f(x) = \sqrt{40}$ 的解，則 $\alpha + \beta =$ _____ .

(2) 若 $f(\alpha) = \sqrt{40}$ ，則 $9^\alpha + 9^{-\alpha} =$ _____ .

(3) 若 $y = f(x)$ 與 $y = ax^2$ 的圖形，交於 A, B 兩點，已知 $2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4}$ ，則 $a =$ _____ .

5. 設 x, y, z 表三角形三邊的長，若 $100^x + 100^y + 100^z = 10^{x+y} + 10^{y+z} + 10^{z+x}$ ，

則此三角形為_____。

(1)等邊三角形 (2)等腰三角形 (3)直角三角形 (4)銳角三角形 (5)鈍角三角形。

6. 在養分充足的情況下，細菌的數量會以指數函數的方式成長，假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍，細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍。若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等，則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10？_____

(A) 24 小時。 (B) 48 小時。 (C) 69 小時。 (D) 96 小時。 (E) 117 小時。

【學測 95 單選 5】

7. 對任意實數 x 而言， $27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值為

(A) 3 (B) $3\sqrt{3}$ (C) 9 (D) 27 (E) $81\sqrt{3}$

【學測 97 單選 1】

8. 根據過去長期統計資料顯示：某公司推銷員的年資 x (年)，與每次推銷成功的機率 $y(x)$ ，

滿足下列關係式：
$$y(x) = \frac{2^{-3+x}}{1+2^{-3+x}}$$

(1) 化簡 $r(x) = \frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，並說明 $r(x)$ 的值隨 x 增大而增大

(即 $r(x)$ 為遞增函數)。

(2) 說明年資 8 年(含)以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於 4%。

【數乙 94 非選 2】

9. 當 (x, y) 在直線 $2x + y = 3$ 上變動時，關於 $K = 9^x + 3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？_____。

- (1) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$
- (2) K 有最大值 28、但沒有最小值
- (3) K 沒有最大值、但有最小值 12
- (4) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$
- (5) K 沒有最大值也沒有最小值

【數甲 101 單選 5】

10. 坐標平面上，在函數圖形 $y = 2^x$ 上，標示 A 、 B 、 C 、 D 四個點，其 x 坐標分別為 -1 、 0 、 1 、 2 。請選出正確的選項。_____

- (1) 點 B 落在直線 AC 下方
- (2) 在直線 AB 、直線 BC 、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大
- (3) A 、 B 、 C 、 D 四個點，以點 B 最靠近 x 軸
- (4) 直線 $y = 2x$ 與 $y = 2^x$ 的圖形有兩個交點
- (5) 點 A 與點 C 對稱於 y 軸

【學測 104 多選 7】

11. 設 $f(x) = 5^{x+1}$ 的圖形 Γ 交 y 軸於 A 點，且 Γ 上一點 B 在 x 軸正向的投影點為 C ，

已知 $\triangle ABC$ 的面積為 5^{14} ，若 B 點的 x 坐標落在正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【108 中區學測模】

12. 試問共有多少組正整數 (k, m, n) 滿足 $2^k 4^m 8^n = 512$ ？

- (1) 1 組 (2) 2 組 (3) 3 組 (4) 4 組 (5) 0 組

【學測 108 單選 3】

13. 設 $a = \sqrt[3]{10}$ 。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。 。

- (1) $25 \leq a^5 < 30$ (2) $30 \leq a^5 < 35$ (3) $35 \leq a^5 < 40$ (4) $40 \leq a^5 < 45$ (5) $45 \leq a^5 < 50$

14. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數 a 後，螢幕上的數會變成 a^2 。當一開始時螢幕上的數 b 為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近 81^3 。試問實數 b 最接近下列哪一個選項？

- (1) 1.7 (2) 3 (3) 5.2 (4) 9 (5) 81

~解答~

【1】(4)(5) 【2】(2)(4)(5) 【3】(1)(2)(5) 【4】(1)0;(2)38; (3) $\frac{41}{18}$ 【5】(1)(2)(4) 【6】(E) 【7】(C)

【8】(1) $r(x) = 2^{-3+x}$ (2)略 【9】4 【10】124 【11】11 【12】3 【13】5 【14】3

(D) 模擬試題觀摩

1. 若 $x \in R$ ， $(x+2)(x-1)(x-2)(x-3) \leq 0$ ，已知 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ 的最大值 a ，最小值 b ，則數對 $(a, b) = ?$
- (A) $(12, 1)$ (B) $(11, -\frac{5}{4})$ (C) $(1, -\frac{5}{4})$ (D) $(11, -1)$ (E) $(1, -1)$
2. 若對所有實數 x ，皆無法使二次函數 $f(x) = 3x^2 + 2ax - a < 0$ 成立，則實數 a 值的範圍為 $m \leq a \leq n$ ，則 $m+n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 函數 $y = f(x) = a^x + m - 1$ 之圖形通過第二、三、四象限，則下列何者為真？
- (A) $a > 1$ 且 $m > 1$ (B) $0 < a < 1$ 且 $m > 1$ (C) $a > 1$ 且 $m > 0$ (D) $0 < a < 1$ 且 $m > 0$
- (E) $0 < a < 1$ 且 $m < 0$
4. 已知函數 $y = a^x$ 過點 $(2, 3)$ ，則下列關於此函數的敘述何者正確？
- (A) 圖形必過點 $(0, 1)$ (B) 圖形必過點 $(4, 6)$ (C) 圖形必過點 $(1, \sqrt{3})$
- (D) 圖形必過點 $(-2, -3)$ (E) $1 < a < 2$

5. 假設甲、乙兩人同時學習中文打字，經過 n 週的學習，甲平均每分鐘打 $144(1-2^{-0.3n})$

個字，乙平均每分鐘打 $144(1-3^{-0.2n})$ 個字。試問下列何者正確？_____

(A) 經過 10 週練習，甲平均每分鐘可打 126 字

(B) 經過 20 週練習，甲平均每分鐘打字數目比乙多

(C) 不管經過幾週的練習，甲平均每分鐘的打字數不可能超過 144 個字

(D) 經過 1 週練習，甲平均每分鐘打字數大於 72 字

(E) 在相同的練習時間下，甲打字的速度都不會比乙快

6. 網路謠言的散布非常驚人，曾有人利用這樣的數學式來表示其散布速度：

$N = P(1 - 1/3)^{-d}$ ，其中 P 為網友總數， N 為謠言流傳 d 天後，聽過這則謠言的人數。根據這個式子，試問一則謠言開始流傳_____天後，就會有超過 70% 的網友聽過。($\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

7. 對於所有實數 x ， $x^2 - 4ax + 2a + 30$ 之值恆不為負 ($a \in \mathbf{R}$)，關於 $f(a) = (a+3)(|a-1|+1)$ 的敘述何者為真？_____。

(A) a 之最大值為 3

(B) $f(a)$ 之最小值為 4

(C) $f(a)$ 之最大值為 18

(D) 方程式 $f(a) = 5$ 有三相異實根

(E) 不等式 $f(a) < -3$ 無解。

8. 不等式 $\sqrt{2x+5} > x+1$ 實數解 x 的範圍為_____。

9. 某人向銀行貸款 A 元，月利率 r ，每個月一期，複利計算， n 期還清，則下列哪些敘述是正確的？_____。($A, r > 0, n \in N, n$ 為偶數)

(A) 每月應攤還 $\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ 元 (B) 每月應攤還金額大於 $\frac{A}{n}$ 元

(C) 若改成每兩個月一期，則每兩個月應攤還小於 $\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times 2$ 元

(D) 若改成貸款 $3A$ 元，則每個月應攤還 $\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \times 3$ 元

(E) 若每月利率降為 $\frac{r}{2}$ ，則每個月應攤還 $\frac{Ar(2+r)^n}{(2+r)^n - 2^n}$ 元。

~解答~

【1】(D) 【2】-3 【3】(E) 【4】ACE 【5】ACE 【6】6 【7】ACDE 【8】 $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$ 【9】ABD

《單元 5 指對數(二)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】對數定義

設 $b > 0$ 、 $a > 0$ 、 $a \neq 1$ ，若實數 x 滿足 $a^x = b$ ，則記為 $x = \log_a b$ ，稱為以 a 為底數， b 為真數之對數。而 $\log_{10} b$ 簡記為 $\log b$ ，稱為_____。

我們稱 $\log_a b$ 有意義的意思就是_____。

【觀念 2】對數的基本性質

設 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ， $b > 0$ ， r 為實數，則

(2.1) $\log_a a = 1$ (2.2) $\log_a 1 = 0$ (2.3) $\log_a a^r = r$ (4) $a^{\log_a b} = \underline{\hspace{2cm}}$

【觀念 3】對數運算與換底公式

設 x_1 、 x_2 、 x 均為正數， $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則

(3.1) $\log_a x_1 x_2 = \log_a x_1 + \log_a x_2$

(3.2) $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

(3.3) $\log_a x^r = r \log_a x$ ， r 為任意實數。

(3.4) $\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$ ， $0 < c \neq 1$ (換底公式)

(3.5) 連鎖律： $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$ 。

(3.6) 輔助公式：設 a 、 b 、 x 皆為正數， $a \neq 1$ 且 $b \neq 1$ ， m 、 n 皆為實數且

$m \neq 0$ ，則：(A) $\log_{a^m} b^n = \underline{\hspace{2cm}}$ (B) $a^{\log_b x} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【特例】 $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

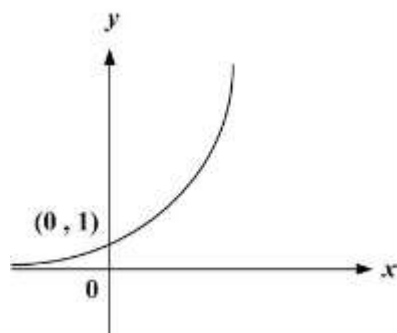
【特例】 $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$

【特例】 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

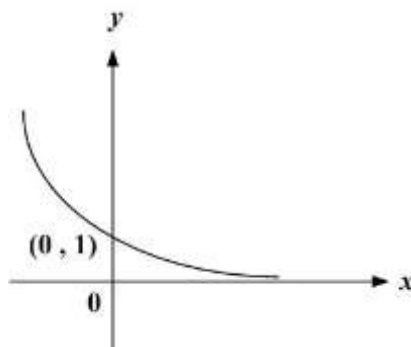
【特例】 $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ 。

【觀念 4】指數函數的圖形

(4.1) $a > 1$ ， $y = a^x$



$0 < a < 1$ ， $y = a^x$



(4.2) 指數函數的性質

(a) 必過定點(0,1)，其圖形必在 x 軸上方，且其圖形的「漸近線」為 x 軸

(b) 圖形凹向上，若 $a > 1$ ，其圖形為嚴格遞增；若 $0 < a < 1$ ，其圖形為嚴格遞減。

(c) 以 $y = a^x$ 為基本圖形，善用對稱與平移作圖

(c.1) 以_____，則圖形對稱於 y 軸。即_____與_____的圖形對稱於 y 軸。

(c.2) 以_____，則圖形對稱於 x 軸。即_____與_____的圖形對稱於 x 軸。

(c.3) 以_____，其圖形對稱於原點。即_____與_____的圖形對稱於原點。

(c.4) 以_____，其圖形對稱於直線 $x - y = 0$ 。即_____與_____的圖形對稱於直線 $x - y = 0$ 。

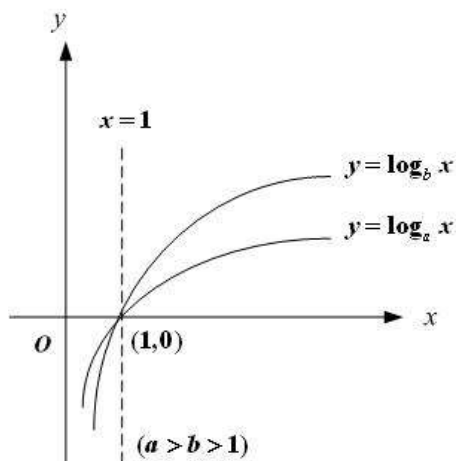
(c.5) 以 $x - h$ 代 x ，若 $h > 0$ ，則圖形____移 h ；若 $h < 0$ ，則圖形____移 $|h|$

以 $y - k$ 代 y ，若 $k > 0$ ，則圖形____移 k ；若 $k < 0$ ，則圖形____移 $|k|$

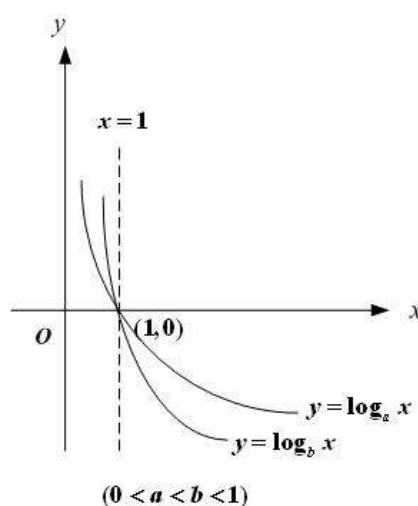
(d) 設 $x_1, x_2 \in R$ ，則 $f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} a^{x_2} = f(x_1) f(x_2)$

【觀念 5】對數函數的圖形

(5.1) $a > 1$ ， $y = \log_a x$



$0 < a < 1$ ， $y = \log_a x$



(5.2) 對數函數的性質

(a) 圖形過定點_____，圖形在 y 軸右側，以 y 軸為漸近線。

(b) 若 $a > 1$ ，其圖形為嚴格遞增；若 $0 < a < 1$ ，其圖形為嚴格遞減。

(c) 設 $x_1, x_2 \in R^+$ ，則 $f(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$ 。

(5.3) 指數函數與對數函數互為反函數，其圖形對稱於直線 $y = x$ 。

【觀念 6】對數方程式

(6.1) 若 $a \neq 1$ 且 $a > 0$ ，則根據對數的單調性(嚴格遞增或嚴格遞減)可知

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) = g(x)$$

(6.2) 解對數方程式的方法：

題型(I)：化為同底 \Rightarrow 合併真數 \Rightarrow 去對數 \Rightarrow 注意基本限制

(即底數 > 0 ，底數 $\neq 1$ ，真數 > 0)

題型(II)：利用互換公式 $a^{\log b} = b^{\log a}$ 先化簡再求解。

題型(III)：利用倒數公式 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ 先化簡再求解。

題型(IV)： $\log x$ 在指數時，考慮兩邊取對數求解

【觀念 7】對數不等式

(7.1) 對數不等式的原理：

(I) 底數相同：

(A) 若 $a > 1$ ，則 $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \geq g(x)$

(B) 若 $0 < a < 1$ ，則 $\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > 0, g(x) > 0, f(x) \leq g(x)$

(II) 底數不同：換成相同底

(7.2) 解對數不等式的方法：

題型(I)：化為同底 \Rightarrow 合併真數 \Rightarrow 去對數 \Rightarrow 注意基本限制

題型(II)：當對數在指數時：_____。 題型(III)：善用倒數公式

【觀念 8】求極值問題

(8.1) 原理：(1) 當 $a > 1$ 時， x 的值大值 = $\log_a x$ 的極大值； x 的極小值 = $\log_a x$ 的極小值

(2) 當 $0 < a < 1$ 時， x 的值大值 = $\log_a x$ 的極小值； x 的值小值 = $\log_a x$ 的極大值

(8.2) 常見的題型及方法：(a) 用配方法求極值 (b) 取 $\log x$ 為未知數再配方 (c) 利用判別式

(d) 算幾不等式 (e) 柯西不等式

【觀念 9】首數與尾數

(9.1) 設 $a > 0$ 且 $a = 10^n b$ ， $1 \leq b < 10$ ，則 $\log a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $0 \leq \log b < 1$ ，

則稱 n 為 $\log a$ 之 _____， $\log b$ 稱 $\log a$ 之 _____。

(9.2) 應用：判斷正大數的位數，及正小數於小數點後第幾位開始出現非零的數。

(9.3) 運用對數表及內插法解決應用問題。

(B) 綜合題型分析**題型 1~學測 108 單選 5~**

設正實數 b 滿足 $(\log 100)(\log b) + \log 100 + \log b = 7$ 。試選出正確的選項。_____

- (1) $1 \leq b \leq \sqrt{10}$ (2) $\sqrt{10} \leq b \leq 10$ (3) $10 \leq b \leq 10\sqrt{10}$
 (4) $10\sqrt{10} \leq b \leq 100$ (5) $100 \leq b \leq 100\sqrt{10}$

解：

【答】4

題型 2

已知 $a_n = \log_n(n+1)$ ，若 $\sum_{n=2}^{1023} \frac{1}{\log_{a_n} 100} = \frac{q}{p}$ ，其中 p, q 為正整數且互質，則 $p+q =$ _____。

解：

【答】3

題型 3~數甲 104 單選 1~

滿足不等式 $\frac{1}{104} \leq (\sqrt{10})^x \leq 2015$ 的整數 x 共有多少個？_____

- (1) 9 個 (2) 10 個 (3) 11 個 (4) 12 個 (5) 13 個

解：

【答】3

題型 4

設 $x > 0$ ， $f(x) = (\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 3$ ，則下列何者正確？_____。

- (A) $y = f(x)$ 的圖形為拋物線的一部份
- (B) $f(x)$ 的最小值為 -4
- (C) $f(x)$ 為遞增函數
- (D) 方程式 $f(x) = 0$ 有兩個相異實根
- (E) 方程式 $f(x) = 0$ 恰有一正根。

解：

【答】(B)(D)

題型 5~學測 106 選填 E~

設 a, b, x 皆為正整數且滿足 $a \leq x \leq b$ 及 $b - a = 3$ 。若用內插法從 $\log a, \log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x \approx \frac{1}{3} \log a + \frac{2}{3} \log b = \frac{1}{3} (1 + 2 \log 3 - \log 2) + \frac{2}{3} (4 \log 2 + \log 3),$$

則 x 的值為_____。

解：

【答】47

題型 6~數乙 107 單選 3~

設 $a < b < 2^{10}$ ，其中 $\log a = 3$ 。已知利用 $\log a$ 、 $\log(2^{10})$ 的值與內插法求得 $\log b$ 的近似值為 3.0025，試問 b 的值最接近下列哪一個選項？（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ）

- (1) 1002 (2) 1006 (3) 1010
 (4) 1014 (5) 1018

解：

【答】1006

題型 7~數乙 107 多選 5~

設 $2^x = 3$ ， $3^y = 4$ 。試選出正確的選項。（註： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ）

- (1) $x < 2$ (2) $y > \frac{3}{2}$ (3) $x < y$ (4) $xy = 2$ (5) $x + y < 2\sqrt{2}$

解：

【答】AB

題型 8~學測 102 多選 8~

設 $a > 1 > b > 0$ ，關於下列不等式，請選出正確的選項：

- (A) $(-a)^7 > (-a)^9$ (B) $b^{-9} > b^{-7}$ (C) $\log_{10} \frac{1}{a} > \log_{10} \frac{1}{b}$
 (D) $\log_a 1 > \log_b 1$ (E) $\log_a b \geq \log_b a$

解：

【答】AB

題型 9 ~ 學測 103 多選 7~

設坐標平面上， x 坐標與 y 坐標皆為整數的點稱為格子點。請選出圖形上有格子點的選項。_____。

- (1) $y = x^2$ (2) $3y = 9x + 1$ (3) $y^2 = -x - 2$ (4) $x^2 + y^2 = 3$ (5) $y = \log_9 x + \frac{1}{2}$

解：

【答】135

題型 10 ~ 數甲 102 單選 2~

坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 P 、 Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y = \log_{10} x$ 、 $y = \log_2 x$ 的圖形於 R 、 S 兩點。試問四邊形 $PQSR$ 的面積最接近下列哪一個選項？（ $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ）

- (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13 (5) 14

解：

【答】3

題型 11 ~ 數乙 100 多選 5~

設 (π, r) 為函數 $y = \log_2 x$ 圖形上之一點，其中 π 為圓周率， r 為一實數。請問

下列哪些選項是正確的？_____

- (1) (r, π) 為函數 $y = 2^x$ 圖形上之一點
- (2) $(-r, \pi)$ 為函數 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 圖形上之一點
- (3) $\left(\frac{1}{\pi}, r\right)$ 為函數 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 圖形上之一點
- (4) $(r, 2\pi)$ 為函數 $y = 4^x$ 圖形上之一點

解：

【答】123

題型 12 ~ 學測 97 多選 9~

已知在一容器中有 A 、 B 兩種菌，且在任何時刻 A 、 B 兩種菌的個數乘積為定值 10^{10} 。為了簡單起見，科學家用 $P_A = \log(n_A)$ 來記錄 A 菌個數的資料，其中 n_A 為 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $1 \leq P_A \leq 10$
- (2) 當 $P_A = 5$ 時， B 菌的個數與 A 菌的個數相同
- (3) 如果上週一測得 P_A 值為 4 而上週五測得 P_A 值為 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍
- (4) 若今天的 P_A 值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個
- (5) 假設科學家將 B 菌的個數控制為 5 萬個，則此時 $5 < P_A < 5.5$

解：

【答】25

題型 13

天上的星星明亮度不太相同，所以天文學家就以「星等」來區分。今以某一特定的星光強度 F_0 為基準，對於能發出星光強度為 F 的星體定義為「星等」，以 $k = -1.7 \log_{10} \frac{F}{F_0}$ 表示，並稱該星體為「 k 等星」。已知月亮為「 -1.4 等星」，北極星為「 2 等星」，則月亮的星光強度大約是北極星的幾倍？ (A)10 (B)20 (C)50 (D)80 (E)100

解：

【答】(E)

題型 14 ~96 學測多選 10~

設 a 為大於 1 的實數，考慮函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (A) 若 $f(3) = 6$ ，則 $g(36) = 6$
- (B) $\frac{f(238)}{f(219)} = \frac{f(38)}{f(19)}$
- (C) $g(238) - g(219) = g(38) - g(19)$
- (D) 若 P, Q 為 $y = g(x)$ 的圖形上兩相異點，則直線 PQ 之斜率必為正數
- (E) 若直線 $y = 5x$ 與 $y = f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y = \frac{1}{5}x$ 與 $y = g(x)$ 的圖形也有兩個交點

解：

【答】ABE

(C) 單元演練 (五)

題 目

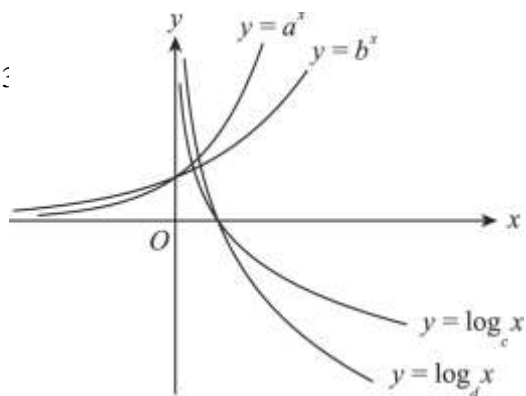
1. 設 $\log_2 3 = a$, $\log_6 5 = b$, 請將 $\log_{75} 90$ 用 a 、 b 表示為_____。

(1) $\frac{1+2a+b+ab}{a+2b+2ab}$ (2) $\frac{3+2a+2b+ab}{a+b+2ab}$ (3) $\frac{1+2a+b+2ab}{3a+2b+2ab}$ (4) $\frac{1+2a+b+3ab}{a+2b+ab}$

2. 設 a , b , c 表 $\triangle ABC$ 的三邊長, 若 $a+b+c=12$ 且 $2\log_3(a+b+c) = 1 + \log_3(ab+bc+ca)$, 求 $\triangle ABC$ 之面積為_____。

3. 如下圖, 試比較 a 、 b 、 c 、 d 之大小順序: _____

(1) $a > b > c > d$ (2) $b > a > c > d$ (3) $a > b > d > c$ (4) $b > a > d > c$ (5) $c > d > a > b$.



4. 設 α, β 為 $x^2 + (2\log 5)x + \log \frac{5}{2} = 0$ 的二根且 $\alpha < \beta$, 求 :

(1) $\alpha =$ _____ (2) $10^\alpha + 10^\beta =$ _____ (3) $10^{\alpha-\beta} =$ _____ (4) $10^\alpha \times 10^\beta =$ _____ .

5. 解不等式 $2\log 2 + \log(x^2 - 5x + 3) < 2\log(12 + 5x - x^2)$, 得 x 的範圍為_____ .

6. 設 $\frac{1}{p} + \frac{1}{3q} = 12$, 其中 p, q 為正數, 則 $3\log_{\frac{1}{3}} p + \log_{\frac{1}{3}} q$ 的

(1) 最大值為 _____, 此時 (2) $(p, q) =$ _____ .

7. 設 a, b 為正實數，已知 $\log_7 a = 11, \log_7 b = 13$ ；試問 $\log_7(a+b)$ 之值最接近下列哪個選項？

_____。(1) 12 (2) 13 (3) 14 (4) 23 (5) 24

【學測 94 單選 4】

8. 以下各數何者為正？_____

(1) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ (2) $\log_2 3 - 1$ (3) $\log_3 2 - 1$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

【學測 92 多選 8】

9. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 是一等比數列，其首項 $a_1 > 1$ 且公比 $r > 1$ 。坐標平面上有一質點 M 自原點 $(0, 0)$ 出發，依以下規則連續移動十次：第一次移動往右 $\log a_1$ 單位，第二次移動向上 $\log a_2$ 單位，第三次移動往右 $\log a_3$ 單位，第四次移動向上 $\log a_4$ 單位，依此類推直到第十次；即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位，接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後，該質點 M 停在點 $(5+5\log 2, 5+\frac{15}{2}\log 2)$ 的位置上，試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1, r) 為以下哪一選項？_____

(1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2) $(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$ (3) $(2, \sqrt{2})$ (4) $(5, \sqrt{5})$ (5) $(5, \sqrt{2})$

【數甲 96 單選 3】

10. 陳老師證明了 $x^2=2^x$ 有兩個正實數解及一個負實數解後，進一步說，此方程式兩邊各取 \log_2 ，得 $2 \log_2 x = x$ ；陳老師要同學討論此新的方程式有多少實數解？

小英說：恰有三個實數解；

小明說：恰有兩個正實數解；

小華說：最多只有兩個實數解；

小毛說：仍然有兩個正實數解及一個負實數解；

小芬說：沒有實數解。

請問哪些人說的話，可以成立？_____

(1) 小英 (2) 小明 (3) 小華 (4) 小毛 (5) 小芬

【數乙 92 多選 7】

11. 設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ 。試問下列哪些選項是正確的？_____

(1) $a^3 = 3$

(2) $\log_{\sqrt{3}} a = \sqrt{3}$

(3) $a > 1$

(4) $a < 3^{\frac{1}{4}}$

【數甲 99 多選 7】

12. 設實數 x 滿足 $0 < x < 1$ ，且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$ ，則 $x =$ _____。

【學測 96 選填 A】

13. 根據對數表， $\log 2$ 的近似值是 0.3010， $\log 3$ 的近似值是 0.4771。

下列選項有哪些是正確的？_____

- (1) $10^9 > 9^{10}$ (2) $10^{12} < 12^{10}$ (3) $10^{11} > 11^{10}$ (4) 方程式 $10^x = x^{10}$ 有一負根

【數甲 93 多選 2】

14. 關於指數函數或對數函數圖形的敘述，下列哪些選項是正確的？_____

- (1) $y = 2010^x$ 的圖形恆在 $y = 99^x$ 的上方
 (2) $y = \log_{99} x$ 與 $y = 99^x$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y = x$
 (3) $y = \log_{99} x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{99}} x$ 兩函數的圖形對稱於 x 軸
 (4) $y = \log_{2010}(x^2 - 10x + 33)$ 的圖形與 x 軸相交

【數乙 99 多選 4】

15. 下列哪一個選項的值最大？_____

- (1) $\log_2 3$ (2) $\log_4 6$ (3) $\log_8 12$ (4) $\log_{16} 24$ (5) $\log_{32} 48$

【數乙 106 單選 2】

16. 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a - \log = \log(x)$ 有兩相異實數解？_____ (1) $a=1$ (2) $a=2$ (3) $a=3$ (4) $a=4$ (5) $a=5$

【數甲 105 單選 1】

17. 已知坐標平面上三點 $(3, \log 3)$ 、 $(6, \log 6)$ 與 $(12, y)$ 在同一直線上，則 $y = \log$ _____。

【學測 107 選填 A】

18. 坐標平面上， Γ_1 為 $y = \log_2 x$ 的圖形， Γ_2 為 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。下列關於 Γ_1 與 Γ_2 的敘述，試選出正確的選項。_____。

- (1) Γ_1 的圖形凹口向下
- (2) Γ_2 的圖形凹口向下
- (3) Γ_1 的圖形均在 x 軸的上方
- (4) Γ_2 的圖形均在 y 軸的右方
- (5) Γ_1 與 Γ_2 恰交於一點

【數乙 106 多選 6】

19. 考慮坐標平面上滿足 $2^x = 5^y$ 的點 $P(x, y)$ ，試問下列哪一個選項是錯誤的？
_____。

- (1) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
- (2) $(\log 5, \log 2)$ 是一個可能的 P 點
- (3) 點 $P(x, y)$ 滿足 $xy \geq 0$
- (4) 所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一直線
- (5) 點 P 的 x, y 坐標可以同時為正整數

【數甲 100 單選 1】

20. 已知不等式 $1.253 \times 10^{845} < 7^{1000} < 1.254 \times 10^{845}$ 成立。請選出正確的選項。_____

- (1) $\log_{10} 7 < 0.846$ (2) $\log_{10} 7 > 0.845$ (3) $7^{100} < 5 \times 10^{84}$ (4) $7^{10} < 2 \times 10^8$

【數甲 92 多選 4】

21. 試問有多少個整數 x 滿足 $10^x < 2 < 9^x$? _____

- (1) 1個 (2) 2個 (3) 3個 (4) 4個 (5) 0個

【學測 107 單選 4】

22. 觀察 2 的次方所形成的等比數列： $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ ，設其中出現的第一個 13 位數為 2^n ，則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(註： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$)

【數乙 101 選填 C】

23. 統計學家克利夫蘭對人體的眼睛詳細研究後發現：我們的眼睛看到圖形面積的大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如：大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ (約 2.16) 倍。觀察某個國家地圖，感覺全國面積約為某縣面積的 10 倍，試問這國家的實際面積大約是該縣面積的幾倍？
[已知 $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 10 = 1$]
- (1) 18 倍 (2) 21 倍 (3) 24 倍 (4) 27 倍 (5) 36 倍

【數乙 93 單選 3】

~參考解答~

【1】1 【2】 $4\sqrt{3}$ 【3】3 【4】(1)-1;(2) $\frac{1}{2}$;(3) $\frac{1}{4}$;(4) $\frac{1}{25}$

【5】 $-1 < x < \frac{5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $\frac{5+\sqrt{13}}{2} < x < 6$ 【6】(1)8;(2) $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ 【7】2 【8】125 【9】5 【10】23

【11】3 【12】 $\frac{1}{4}$ 【13】34 【14】23 【15】1 【16】5 【17】24 【18】145 【19】5 【20】123

【21】2 【22】40 【23】4

(D) 模擬試題觀摩

1. 設 $\log M$ 之尾數與 $\log 0.543$ 之尾數相同， $\log M$ 之首數與 $\log 67$ 之首數相同，則 $M =$ _____ (A) 678.543 (B) 543.678 (C) 543 (D) 678 (E) 67.3

2. 設 a 、 b 、 c 、 d 為正實數，若 $2^a = 3^b = \log_2 c = \log_3 d > 0$ ，則下列何者正確？ _____。

(A) $a > b > d > c$ (B) $d > c > a > b$ (C) $d > c > b > a$ (D) $b > a > d > c$ (E) $c > d > b > a$ 。

3. 關於對數的運算，下列哪些選項是正確的？ _____

(A) $\frac{1}{\log 2} = \log \frac{1}{2}$

(B) $\log_3 2 = -\log_2 3$

(C) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_2 \frac{1}{3}$

(D) $\log_2 3 = \log_4 9$

(E) $\sqrt{(\log 0.2)^2} = \log 0.2$

4. 若 $0 < a < 1$ ，則下列何者正確？ _____

(A) $(1-a)^{\frac{1}{3}} > (1-a)^{\frac{1}{2}}$

(B) $\log_{1-a}(1+a) < 0$

(C) $(1-a)^3 > (1+a)^2$

(D) $(1-a)^{1+a} > 1$

(E) $\log(1+a)^{1-a} < \log(1-a)^{1+a}$

5. 若 $\log_2(\log_3(\log_4 a)) = \log_3(\log_4(\log_2 b)) = \log_4(\log_2(\log_3 c)) = 0$ ，則 $a+b+c =$ _____。

6. 若 $\log a$ 之首數與尾數正巧是方程式 $3x^2 + 11x + m = 0$ 的兩根，則 $m =$ _____。

7. 在坐標平面上，曲線 $y = \log x$ 與一斜率為 $\frac{1}{2}$ 的直線交於 A 、 B 兩點，若 A 、 B 的 x 坐標分別為 a 、 b (其中 $b > a$) 且 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ ，則 $\frac{b}{a} =$ _____。

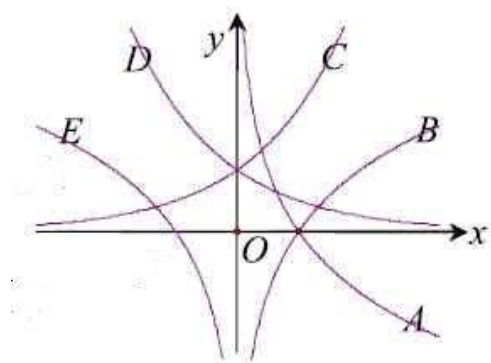
8. 設 a 、 b 、 c 、 d 皆為正數，且 $\log_{\frac{1}{2}} a = 2^a$ ， $\log_{\frac{1}{2}} b = \left(\frac{1}{2}\right)^b$ ， $\log_2 c = \left(\frac{1}{2}\right)^c$ ， $d^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^d$
 下列各數何者最大？_____。(1) a (2) b (3) c (4) d (5)1

9. 在 2 和 50 之間插入 18 個數 a_1, a_2, \dots, a_{18} ，使它們形成 20 項的等比數列，則

$\log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_{18}$ 之值為_____。

10. 設 $a > 1$ ，若 $y = f(x) = a^{-x}$ 與 $y = g(x) = \log_a x$ 的圖形皆在下圖中，則何者為 $y = f(-x)$ 與 $y = -g(x)$ 的圖形？_____。

- (1) B 與 A (2) C 與 A (3) D 與 A (4) C 與 E (5) D 與 E



11. 設 n 為正整數，數列 $\langle a_n \rangle$ ， a_n 為 $\log_3 n$ 的整數部分，則下列何者為真？_____

- (1) a_n 的最小值為 1 (2) $a_{10} = 2$ (3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 有 18 項是 2

- (4) 若 $a_n = k$ ， k 為整數，則 $3^k \leq n < 3^{k+1}$ (5) $\sum_{k=1}^{729} a_k = 3288$

12. 已知方程式 $2^x + x = 0$ 的實根是 a ， $\log_2 x = 2 - x$ 的實根是 b ， $\log_{\frac{1}{2}} x = x$ 的實根是 c ，

則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？_____。

(1) $b > c > a$ (2) $c > b > a$ (3) $a > b > c$ (4) $b > a > c$ (5) $a > c > b$

13. 已知 a 、 b 皆為實數，若 $2.5 < \log a < 3$ 且 $-3 < \log b < -2.5$ ，則下列哪些敘述是正確的？_____

(1) a 的整數部份為二位數

(2) a 的最高位數字可能是 4

(3) b 的小數且其小數點後第一個不為 0 的數字可能是 5

(4) ab 的整數部份可能是 1

(5) $\frac{a}{b}$ 的整數部份是六位數

~參考解答~

【1】C 【2】B 【3】CD 【4】AB 【5】89 【6】 -4 【7】100 【8】3 【9】18 【10】2

【11】2345 【12】1 【13】245

～單元筆記～

《單元 6 數列與級數》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】等差數列

公式：設一等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之公差為 d ，則：

- (1) 一般項 $a_n = a_1 + (n-1)d$ ，其中 a_1 為首項。
 (2) 若 $n \geq m \geq 1$ ，則 $a_n = a_m + (n-m)d$ ，求公差可將式子寫成_____。

基礎訓練 若 a 、 b 之間插入 m 個數而成等差數列，則 $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【觀念 2】等比數列

公式：設一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項為 a_1 ，公比為 r ，則

- (1) 一般項 $a_n = a_1 r^{n-1}$ (2) 若 $m \in N$ ，則 $a_n = a_m r^{n-m}$

【觀念 3】等差中項與等比中項

- (1) 若三數 a 、 b 、 c 成等差數列，則 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， b 稱為 a 與 c 之等差中項。
 (2) 若三數 a 、 b 、 c 成等比數列，則 $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ， b 稱為 a 與 c 之等比中項。

【觀念 4】遞迴關係式

A. 定義：一個數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 中若第 n 項可以用之前的若干項表示所得的關係式稱為一遞迴關係式(recurrence relation)

在此介紹四種簡單的遞迴關係式：

- (1) _____ (2) _____ (3) _____ (4) _____。

B. (1) 等差數列的遞迴定義：已知等差數列的首項為 a_1 ，公差為 d ，則其遞迴

$$\text{表示法為 } \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}, \text{ 其中 } n \geq 2$$

(2) 等比數列的遞迴定義：已知等比數列的首項為 a_1 ，公比為 r ，則其遞迴

$$\text{表示法為 } \begin{cases} a_1 = a \\ a_n = r a_{n-1} \end{cases}, \text{ 其中 } n \geq 2$$

(3) 累加型遞迴定義：型如 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + f(n) \end{cases}$ ， $n \geq 2$ 的數列稱之。

- (4) 累積型遞迴定義：型如 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = f(n) \cdot a_{n-1} \end{cases}$ ， $n \geq 2$ 的數列稱之。

【觀念 5】數學歸納法

原理：設一命題與自然數 n 有關，

- (1) 當 $n=1$ 時，原命題成立(檢驗部分)
- (2) 當 $n=k$ 時，原命題成立，則推得 $n=k+1$ 時，原命題亦成立。(推廣部分)

【觀念 6】等差級數

- (1) 介紹：將「等差數列」的每一項相加，即稱為等差級數。
- (2) 設一等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之公差為 d ，則：

前 n 項的總和 $S_n = \boxed{} = \boxed{}$

基礎訓練 若 $n \geq m \geq 1$ ，則第 m 項至第 n 項的和

$$S_{m \rightarrow n} = \frac{n-m+1}{2}(a_m + a_n) = \boxed{}$$

- (3) 「級數和」與「中間項」的關係

若 n 為奇數，可看出「級數和」與「中間項」的關係：

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+3}{2}} = 2a_{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{故 } S_n = (2a_{\frac{n+1}{2}}) \times \frac{(n-1)}{2} + a_{\frac{n+1}{2}} = na_{\frac{n+1}{2}}$$

【觀念 7】等比級數

- (1) 介紹：將「等比數列」的每一項相加，即稱為等比級數。
- (2) 設一等比數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項為 a_1 ，公比為 r ，則

$$\text{前 } n \text{ 項的總和 } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} & \text{if } r \neq 1 \\ na_1 & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

【觀念 8】 Σ 的性質與 n 項級數之和

- (1) 符號介紹： $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

(2) 基本性質：

$$(a) \sum_{k=1}^n C = C + C + C + \cdots + C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(b) \sum_{k=1}^n c \cdot a_k = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(d) \sum_{k=1}^n (ra_k + sb_k) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(e) \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k \quad (1 < m < n)$$

(3) Σ 的基本求和公式：

【第一類】 n 方和

$$(a) \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c) \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【第二類】連續乘積之和

$$(a) \sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$(b) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1)(n+2) = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

【第三類】分式型

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$(b) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

(c) 其他分式型

$$(c.1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (c.2) \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c.3) \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c.4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c.5) \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underline{\hspace{2cm}}$$

(B) 綜合題型分析**題型 1~學測 108 多選 7~**

設各項都是實數的等差數列 a_1, a_2, a_3, \dots 之公差為正實數 α 。試選出正確的選項。_____

- (1) 若 $b_n = -a_n$ ，則 $b_1 > b_2 > b_3 > \dots$
- (2) 若 $c_n = a_n^2$ ，則 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$
- (3) 若 $d_n = a_n + a_{n+1}$ ，則 d_1, d_2, d_3, \dots 是公差為 α 的等差數列
- (4) 若 $e_n = a_n + n$ ，則 e_1, e_2, e_3, \dots 是公差為 $\alpha + 1$ 的等差數列
- (5) 若 f_n 為 a_1, a_2, \dots, a_n 的算術平均數，則 f_1, f_2, f_3, \dots 是公差為 α 的等差數列

解：

【答】14

題型 2~學測 103 多選 11~

設 $a_1 = 1$ 且 a_1, a_2, a_3, \dots 為等差數列。請選出正確的選項：_____

- (1) 若 $a_{100} > 0$ ，則 $a_{1000} > 0$
- (2) 若 $a_{100} < 0$ ，則 $a_{1000} < 0$
- (3) 若 $a_{1000} > 0$ ，則 $a_{100} > 0$
- (4) 若 $a_{1000} < 0$ ，則 $a_{100} < 0$
- (5) $a_{1000} - a_{10} = 10(a_{100} - a_1)$

解：

【答】235

題型 3~學測 102 多選 12~

設實數組成的數列 $\langle a_n \rangle$ 是公比為 -0.8 的等比數列，實數組成的數列 $\langle b_n \rangle$ 是首項為 10 的等差數列。已知 $a_9 > b_9$ 且 $a_{10} > b_{10}$ 。請選出正確的選項。

- (1) $a_9 \times a_{10} < 0$ (2) $b_{10} > 0$ (3) $b_9 > b_{10}$ (4) $a_9 > a_{10}$ (5) $a_8 > b_8$

解：

【答】13

題型 4~108 全國模~

設 S_n 表示數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項的和，即 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，已知 $S_3 = 18$ ，且滿足 $n \geq 1$ 時，

$a_{n+1} = 2S_n$ ，則下列哪些敘述是正確的？

- (1) $a_1 = 2$ (2) $a_2 = 6$ (3) 數列 $\langle a_n \rangle$ 是等比數列 (4) $a_7 > 1000$ (5) $a_{12} > 200000$

解：

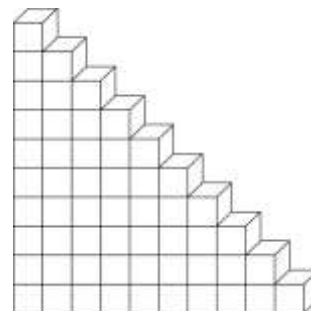
【答】15

題型 5~學測 101 單選 2~

將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊， \dots ，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？

- (1) 75 平方公分 (2) 90 平方公分 (3) 110平方公分
 (4) 130平方公分 (5) 150平方公分

解：



【答】5

題型 6~數甲 97 選填 A~

用大小一樣的鋼珠可以排成正三角形、正方形與正五邊形陣列，其排列的規律如下圖所示：

	正三角形陣列	正方形陣列	正五邊形陣列
每邊1個鋼珠	●	●	●
每邊2個鋼珠	●● ●	●● ●●	●●● ●●● ●●●
每邊3個鋼珠	●●● ●●● ●●●	●●●● ●●●● ●●●●	●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●●
每邊4個鋼珠	●●●● ●●●● ●●●● ●●●●	●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●●	●●●●●● ●●●●●● ●●●●●● ●●●●●● ●●●●●●

已知 m 個鋼珠恰好可以排成每邊 n 個鋼珠的正三角形陣列與正方形陣列各一個；且知若用這 m 個鋼珠去排成每邊 n 個鋼珠的正五邊形陣列時，就會多出 9 個鋼珠。則 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：

【答】 $m = 126, n = 9$

題型 7~學測 95 多選 8~

假設實數 a_1, a_2, a_3, a_4 是一個等差數列，且滿足 $0 < a_1 < 2$ 及 $a_3 = 4$ 。若定義 $b_n = 2^{a_n}$ ，則以下哪些選項是對的？

- (1) b_1, b_2, b_3, b_4 是一個等比數列 (2) $b_1 < b_2$ (3) $b_2 > 4$ 。
 (4) $b_4 > 32$ (5) $b_2 \times b_4 = 256$

解：

【答】12345

題型 8~學測 99 多選 10~

設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足 $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ 。請問下列哪些選項是正確的？

- (1) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 1$
 (2) 如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數
 (3) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數
 (4) $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$ (n 為正整數)
 (5) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$ 都是奇數 (n 為正整數)

解：

【答】234

(C) 單元演練 (六)

題 目

1. 設三正數 a, b, c 成等比數列, a, b 的等差中項為 x ; b, c 的等差中項為 y , 則 $\frac{a}{x} + \frac{c}{y}$ 之值為_____ (1)2 (2)3 (3)4 (4)5

2. 每週同一時間點記錄某植物的成長高度, 連續五週的數據為

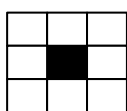
$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6, a_4 = 15, a_5 = 31。$$

請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子? _____

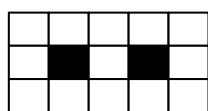
- (1) $a_{t+1} = 3a_t - 1, t = 1, 2, 3, 4$
 (2) $a_t = t!, t = 1, 2, 3, 4, 5$
 (3) $a_{t+1} = a_t + t^2, t = 1, 2, 3, 4$
 (4) $a_t = 2^t - 1, t = 1, 2, 3, 4, 5$
 (5) $a_{t+1} = ta_t + 1, t = 1, 2, 3, 4$

【學測 104 單選 1】

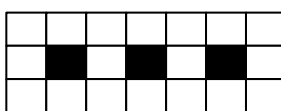
3. 用黑、白兩種顏色的正方形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：



第 1 個



第 2 個



第 3 個

拼第 95 個圖需用到_____塊白色地磚。

【學測 95 選填 G】

4. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ 且對於任一正整數 $a_n a_{n+1} a_{n+2} \neq 1$, 又

$a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$, 則 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{102}$ 的和為_____。

(1)103 (2)202 (3)203 (4)405 .

5. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 是一等比數列, 其首項 $a_1 > 1$ 且公比 $r > 1$ 。坐標平面上有一質點

M 自原點 $(0, 0)$ 出發, 依以下規則連續移動十次：

第一次移動往右 $\log a_1$ 單位, 第二次移動向上 $\log a_2$ 單位, 第三次移動往右 $\log a_3$

單位, 第四次移動向上 $\log a_4$ 單位, 依此類推直到第十次；

即第 $2k-1$ 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位, 接著第 $2k$ 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單

位。已知經過這十次的移動後, 該質點 M 停在點 $(5+5\log 2, 5+\frac{15}{2}\log 2)$

的位置上, 試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1, r) 為以下哪一選項？

(1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (2) $(2\sqrt{2}, \sqrt{5})$ (3) $(2, \sqrt{2})$ (4) $(5, \sqrt{5})$ (5) $(5, \sqrt{2})$

6. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 中滿足 $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$, n 為正整數, 由此可推得下列何者為真? _____。

(1) $a_2 = \frac{3}{2}$ (2) $a_3 = \frac{4}{3}$ (3) $a_4 = \frac{5}{4}$ (4) $a_{100} = 1\frac{1}{100}$ (5) $a_n = \frac{n+1}{n}$.

7. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中滿足 $na_{n+1} = (n+2)a_n + 4n$, n 為正整數且 $a_2 = 16$, 則下列何者為真? _____。

(1) $a_1 = 4$ (2) $a_3 = 28$ (3) $a_3 = 36$ (4) $a_4 = 64$ (5) $a_n = 4n^2$.

8. 平面上 n 個圓最多可以將平面分割成 a_n 個區域, 而且這個數列 $\langle a_n \rangle$ 會滿足下列形式的遞迴關係式, $a_n = a_{n-1} + \alpha n + \beta$ ($n \geq 2$), 下列何者為真? _____。

(1) $a_3 = 8$ (2) $\alpha = 2$ (3) $\beta = 2$ (4) $a_n = n^2 - 2n + 2$ (5) 數列 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列 .

9. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列。已知前十項的和為 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 80$ ，前五個奇數項的和為 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 120$ ，請選出首項 a_1 的正確範圍。
- (1) $a_1 < 80$ (2) $80 \leq a_1 < 90$ (3) $90 \leq a_1 < 100$ (4) $100 \leq a_1 < 110$ (5) $110 \leq a_1$

【學測 105 單選 6】

10. 設正數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $8S_n = (a_n + 2)^2$ ，則下列何者正確？_____。

- (1) $\langle a_n \rangle$ 為等差數列 (2) $\langle a_n \rangle$ 為等比數列 (3) $\langle a_n \rangle$ 為調和數列
 (4) $\langle a_n \rangle$ 有公差為 4 (5) $\langle a_n \rangle$ 有公比為 3 .

11. 設 $\langle b_n \rangle$ 為等差數列，則當數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足下列哪些條件時， $\langle a_n \rangle$ 也會是等差數列？_____

- (1) 對任意自然數 n ， $a_n = b_n - 2008$ (2) 對任意自然數 n ， $a_n = 2008b_n$
 (3) 對任意自然數 n ， $a_n = b_{2n+1}$ (4) 對任意自然數 n ， $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2n^2 - 3n + 1$
 (5) 對任意自然數 n ， $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1)^2$.

12. (1) 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 滿足 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+3}{6n+4}$ ，且前 n 項和分別為 S_n 與 S'_n ，

則 $S_{11} : S'_{11} =$ _____ .

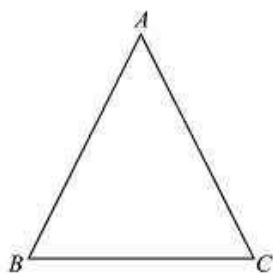
- (2) 兩等差數列前 n 項和之比為 $(2n+3) : (3n+2)$ ，則此兩數列第 11 項之比為_____ .

13. 設 $(a_{n+1})^2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(a_n)^2$ ， n 為正整數，且知 a_n 皆為正。令 $b_n = \log a_n$ ，則數列 b_1, b_2, b_3, \dots 為

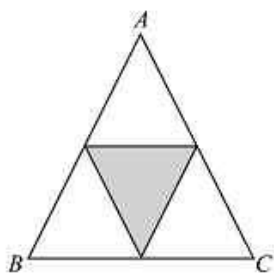
- (1) 公差為正的等差數列
- (2) 公差為負的等差數列
- (3) 公比為正的等比數列
- (4) 公比為負的等比數列
- (5) 既非等差亦非等比數列

【學測 100 單選 3】

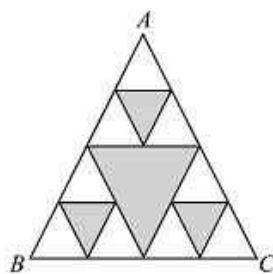
14. 設 $\triangle ABC$ 是邊長 1 的「直立」正三角形，取三邊中點並兩兩連線，將 $\triangle ABC$ 四等分，得到三個「直立」正三角形和一個「倒立」正三角形（如圖(2)之陰影區）。將「倒立」正三角形移走，再將剩下的三個「直立」正三角形，依照前述步驟分割，並移去「倒立」正三角形，則第 4 次移走「倒立」正三角形之後，總共移走的面積為_____。



圖(1)



圖(2)



圖(3)

15. 台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交價)的漲、跌 7% 範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在 93 元至 107 元之間。假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌 7%)，緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲 7%)。請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？_____ (須查對數表)
- (1)39 元 (2) 39.5 元 (3) 40 元 (4) 40.5 元 (5) 41 元

【93 學測】

16. 某甲自 89 年 7 月起，每月 1 日均存入銀行 1000 元，言明以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。某乙則於 89 年 7 月起，每單月（一月、三月、五月…）1 日均存入銀行 2000 元，亦以月利率 0.5% 按月複利計息，到 90 年 7 月 1 日提出。一整年中，兩人都存入本金 12000 元。提出時，甲得本利和 A 元，乙得本利和 B 元。問下列選項何者為真？_____。
- (1) $B > A$ (2) $A = 1000 \left[\sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1005}{1000} \right)^k \right]$ (3) $B = 2000 \left[\sum_{k=1}^6 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{2k} \right]$

(4) $A < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$ (5) $B < 12000 \left(\frac{1005}{1000} \right)^{12}$.

【91 學測多選 11】

17. 一機器狗每秒鐘前進或者後退一步，程式設計師讓機器狗以前進 3 步，然後再後退 2 步的規律移動。如果將此機器狗放在數線的原點，面向正的方向，以 1 步的距離為 1 單位長。令 $P(n)$ 表示第 n 秒時機器狗所在位置的坐標，且 $P(0) = 0$ ，那麼下列選項何者為真？ ____。
- (1) $P(3) = 3$ (2) $P(5) = 1$ (3) $P(10) = 2$ (4) $P(101) = 21$ (5) $P(103) < P(104)$ 。

【學測 91 多選 8】

18. 已知 a_1, a_2, a_3 為一等差數列，而 b_1, b_2, b_3 為一等比數列，且此六數皆為實數。試問下列哪些選項是正確的？ _____。
- (1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可能同時成立
- (2) $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可能同時成立
- (3) 若 $a_1 + a_2 < 0$ ，則 $a_2 + a_3 < 0$
- (4) 若 $b_1 b_2 < 0$ ，則 $b_2 b_3 < 0$
- (5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正整數且 $b_1 < b_2$ ，則 b_1 整除 b_2 。

【學測 97 多選 8】

19. 在一個圓的圓周上，平均分布了 60 個洞，兩洞間稱為一間隔。在 A 洞打上一支木樁並綁上線，然後依逆時針方向前進，每隔 9 個間隔就再打一支木樁，並綁上線，依此繼續操作，如下圖所示。試問輪回到 A 洞需再打樁前，總共已經打了 _____ 支木樁。



【學測 91 選填 D】

20. 某君於九十年初，在甲、乙、丙三銀行各存入十萬元，各存滿一年後，分別取出。
 已知該年各銀行之月利率如下表，且全年十二個月皆依機動利率按月以複利計息。

	甲銀行	乙銀行	丙銀行
1~4 月	0.3%	0.3%	0.3%
5~8 月	0.3%	0.4%	0.2%
9~12 月	0.3%	0.2%	0.4%

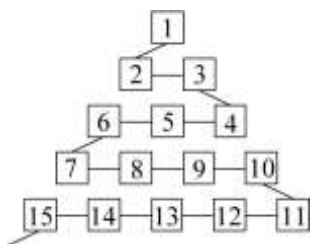
假設存滿一年，某君在甲、乙、丙三家銀行存款的本利和分別為 a 、 b 、 c 元，請問
 下列哪些式子為真？ (1) $a > b$ (2) $a > c$ (3) $b > c$ (4) $a = b = c$.

【數甲 91 多選 7】

21. 若數列 $\{a_n\}$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{7}$ ， $a_2 = \frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1} = \frac{7}{2} a_n(1 - a_n)$ ($n \geq 1$)，則 $a_{101} - a_{100} =$ _____ .

【數乙 92 選填 B】

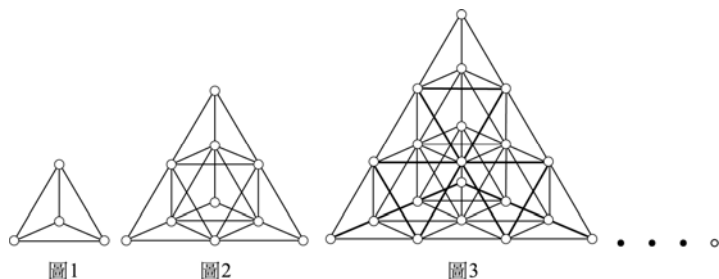
22. 下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：



數字 1 出現在第 1 列；數字 2, 3 出現在第 2 列；數字 6, 5, 4 (從左至右)
 出現在第 3 列；數字 7, 8, 9, 10 出現在第 4 列；依此類推。試問第 99 列，從
 左至右算，第 67 個數字為_____ .

【數乙 94 選填 B】

23. 用單位長的不鏽鋼條焊接如下圖系列的四面體鋼架，圖中的小圈圈「○」表示焊接點，圖 1 有兩層共 4 個焊接點，圖 2 有三層共 10 個焊接點，圖 3 有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖 5 有六層共多少焊接點？_____個。 【91 數乙選填 E】



~參考解答~

- 【1】 1 【2】 3 【3】 478 【4】 3 【5】 5 【6】 全 【7】 1345 【8】 12 【9】 4 【10】 14 【11】 1235
 【12】 (1) 3:8 (2) 9:13 【13】 2 【14】 $\frac{175}{1024}\sqrt{3}$ 【15】 1 【16】 全 【17】 1234 【18】 24
 【19】 20 【20】 12 【21】 $\frac{3}{7}$ 【22】 4884 【23】 56

(D) 模擬試題觀摩

1. 某人有 1000 萬元要做 20 年長期儲蓄，他比較四家銀行所提供的複利方案如下：

甲銀行：前 10 年每年複利，年利率 6%，後 10 年每年複利，年利率 4%

乙銀行：前 10 年每年複利，年利率 4%，後 10 年每年複利，年利率 6%

丙銀行：每年複利，年利率 5%

丁銀行：每兩年複利，每次利率 10%

請問哪一家銀行的方案最優惠？_____。(A)甲 (B)乙 (C)丙 (D)丁 (E)都一樣

2. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ 為一等比數列且均為正數， $a_{11} = \frac{1}{a_1}$ ， $a_4 = 4$ ，求 $a_3 =$ _____。

3. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 之定義為 $a_1 = 2$ ， $a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$ ， $n \in N$ ， $n \geq 2$ ，

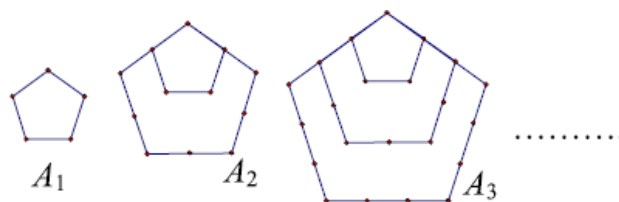
則 $\sum_{k=1}^{12} a_k =$ _____。

4. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中，滿足 $a_1 = 2$ 且 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$ ，求 $a_{100} - a_{99} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ ；令 $a_n = 1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + n \cdot 1$ ， $b_1 = 1$ ，

$b_{n+1} = b_n + a_n$ ，則 $b_{100} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. A_1 、 A_2 、 $A_3 \cdots$ 為一群幾何圖形，其中 A_n 包含 n 個正五邊形，邊長依次為 1 、 2 、 \cdots 、 n 單位長，重疊放置如下圖，若在其任一邊上，每間隔一單位處取一點(含頂點)，則 A_1 上有 5 個點， A_2 上有 12 個點， A_3 上有 22 個點，請問 A_{20} 上有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個點。



~參考解答~

【1】C 【2】8 【3】4096 【4】 $\frac{3}{2}$ 【5】4249576 【6】651

《單元 7 排列組合(一)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】邏輯的基本概念

1. 定義：“邏輯”一詞是英文 logic 的音譯，是研究論證推演的方法。簡單的說它是一門“有效推論規則的科學”。
2. 可以 _____ 的語句稱為敘述。常以 p 、 q 、 A 、 B 、.....表示。
敘述之真假稱為真假值，以 T 表真 (Truth)，以 F 表假 (False)
而真假待定的敘述，如： $x^2 - 1 = 0$ ， x 為偶數，老師很帥，那人數學真好，...
等，則稱為_____。兩者皆為邏輯研究的基本元素。
3. 否定敘述：若 p 為一敘述，則以 $\sim p$ 表示 p 之否定敘述，讀作“非 p ”當 p 為真時， $\sim p$ 為假， p 為假時， $\sim p$ 為真。
4. 複合敘述：
將二個或二個以上的敘述用連接詞，組合成一個新的敘述，則此新敘述稱為複合敘述。
5. 兩敘述 p 、 q ，具因果關係， p 為前提（條件）， q 為結論（終結）時以若“ p 則 q ”表示，記作_____。在 p 為真 q 為假時， $p \rightarrow q$ 為假，否則為真。
6. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

【觀念 2】集合的基本概念

1. 集合的定義：由明確而可鑑別的知覺對象或思維對象所聚合而成的群體稱之為集合。
而集合中的分子，叫做這集合的_____。通常以大寫英文字母表示集合，小寫英文字母表示元素。
2. 元素與集合、集合與集合的關係：
 - (1) \in ：屬於(元素與集合關係) 例如： $1 \in \{1, 2\}$
 - (2) \subset ：包含於(集合與集合關係) 例如： $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ ，此時 $\{1, 2\}$ 稱為 $\{1, 2, 3\}$ 的_____。
3. 集合的特性：_____不計，_____不計，例如： $\{1, 2, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$ 。

4. 集合的表示法

- (1) 列舉式(表列法)：如 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 表示小於 5 之自然數所成的集合。
- (2) 描述法(構式法)：如 $\{x | x \text{ 為小於 } 5 \text{ 之自然數}\}$ 表示小於 5 之自然數所成的集合。

5. 有關集合的名詞

- (1) 空集合：不含任何元素之集合，記為 ϕ 或 $\{ \}$ 。
- (2) 子集合：若集合 A 中之每一元素皆屬於集合 B ，則稱 A 為 B 之一子集合(部分集合)，記為_____ (讀作 A 包含於 B)，並規定空集合 ϕ 為任何集合的子集合。另外每一集合亦為本身之子集合，即 $A \subset A$ 。
- 例如： $\phi \subset A = \{1, 2\} \subset A \subset B = \{1, 2, 3\}$
- (3) 相等集合：若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，則稱 A 與 B 為相等集合，記為 $A = B$ 。
- (4) 冪集合：集合 A 之一切子集合所組成之集合稱為 A 之冪集合，記為 2^A ，即_____。
- 例如：若 $A = \{1, 2\}$ ，則 $2^A =$ _____。
- (5) 宇集：討論一個給定問題所涉及對象的全體所成之集合，常以 U 表之。
- (6) 補集：不在 A 之元素所成之集合稱為 A 之補集或餘集，記為 A' 或 \bar{A} 或 A^c 。
- 例如，若 $U = \{2, 4, 5, 7, 9\}$ ， $A = \{2, 7, 9\}$ ，則 $A' =$ _____。

6. 集合的運算

- (1) 交集： $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。(在 A 內且在 B 內的元素集合)
- 例如： $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ，則 $A \cap B =$ _____。
- (2) 聯集： $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。(在 A 內或在 B 內的元素集合)
- 例如： $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ，則 $A \cup B =$ _____。
- (3) 差集： $A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，即 $A - B = A \cap B'$ 。(在 A 內不在 B 內的元素集合)
- 例如： $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ， $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ，則 $A - B =$ _____。
- (4) 積集： $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ 且 } b \in B\}$ 。
- (5) 狄摩根定律：(1) $(A \cup B)' =$ _____；(2) $(A \cap B)' =$ _____。

7. 集合元素的計數：

設 A 、 B 、 C 為三個非空的有限集合， $n(A)$ 表示 A 之元素的個數。

(1) 差集之元素計數： $n(A-B) =$ _____。

(2) 積集之元素計數： $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ 。

(3) 排容原理(聯集之元素計數)。或稱「取捨原理」

(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(b) $n(A \cup B \cup C) =$ _____。

【觀念 3】基本的計數原理

1. 加法原理：完成一件事的辦法有相異 n 類互斥的可能情形，在第 1 類辦法中有 m_1 種不同的方法，在第二類辦法中有 m_2 種不同的方法，...，而在第 n 類辦法中有 m_n 種不同的方法。

那麼完成這件事共有_____種不同的方法。

(1) 加法原理的 2 個重點：_____，_____。

(2) 選擇適當的分類標準，可使計數易於把握。

2. 乘法原理：

設要完成某件事需經 A 、 B 兩個步驟，若步驟 A 有 m 種方法、步驟 B 有 n 種方法，

則完成此件事的方法有_____種。

3. 樹形圖：

利用樹枝形狀的圖形，列舉出一連串事件發生時的所有可能情況，通常由左而右，逐層分析，使複雜狀況明顯化。

(1) 使用時機：問題中之步驟繁多，且各步驟間會互相影響時，宜用此法。

(2) 優點：脈絡分明、簡單易為。

(3) 典型的例子：

將六個字母 a 、 a 、 b 、 b 、 c 、 c ；排成一列。若規定第 1 位必須排 a ，

且相同的字母不能相鄰，問共有多少不同的排法？

【說明】

【觀念 4】排列

1. 全取排列：將 n 個相異物 $a_1、a_2、\dots、a_n$ 排成一列，其排法有_____種。
2. 不全取排列： n 個相異物 $a_1、a_2、\dots、a_n$ ，若一次任取 m 個排成一列，則其排列數有_____種，此即為符號 P_m^n ，其中 $n \geq m$ 。
3. 設有 n 種相異物，若一次可重複取 m 個(異同皆可)排成一列其排列數為_____。

記憶法：。

基礎練習：

- (1) 將 4 封信投入 3 個郵筒有_____種方法；若將 3 封信投入 4 個郵筒有_____種方法
 - (2) 6 件不同獎品分給 4 個人，每人可兼得有_____種方法。
 - (3) 將 3 個不同的球放入 8 個不同的箱子，可有_____種放法。
 - (4) 5 種不同的酒倒入 4 個不同的酒杯，每杯只能有一種酒，可有_____種方法。
4. 不盡相異物的直線排列：設有 n 個物品中，共分成 k 類，其中第一類有 a_1 個，第二類有 a_2 個， \dots ，第 k 類有 a_k 個，則將 n 個全取排成一列之方法數為_____，

其中 $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$

常見題型：

- (1) 有順序關係者視為相同
- (2) 樓梯問題，信號問題
- (3) 走捷徑問題
- (4) 排數字問題

(B) 綜合題型分析**題型 1 ~102 學測單選 1~**

學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

- 一、國文成績或英文成績 70 分(含)以上；
- 二、數學成績及格

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

- (1) 小文的英文成績未達 70 分
- (2) 小文的數學成績不及格
- (3) 小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格
- (4) 小文的英文成績未達 70 分但數學成績不及格
- (5) 小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格

【答】5

題型 2 ~學測 92 多選 10~

假設坐標平面上一非空集合 S 內的點 (x, y) 具有以下性質：「若 $x > 0$ ，則 $y > 0$ 」。試問下列哪些敘述對 S 內的點 (x, y) 必定成立？

- (1) 若 $x \leq 0$ ，則 $y \leq 0$
- (2) 若 $y \leq 0$ ，則 $x \leq 0$
- (3) 若 $y > 0$ ，則 $x > 0$
- (4) 若 $x > 1$ ，則 $y > 0$
- (5) 若 $y < 0$ ，則 $x \leq 0$ 。

解：

【答】245

題型 3~學測 106 多選 12~

某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

- (1) $x+y=39$
- (2) $y \leq 11$
- (3) 三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人
- (4) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人
- (5) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人

解：

【答】25

題型 4 ~學測 96 選填 F~

某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同。其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色。公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制。在這些配色的要求之下，最多可有幾種不同款式的「阿民」公仔。

【96 學測】

解：

【答】25

題型 5~學測 108 單選 4~

廚師買了豬、雞、牛三種肉類食材以及白菜、豆腐、香菇三種素類食材。若廚師想用完這六種食材作三道菜，每道菜可以只用一種食材或用多種食材，但每種食材只能使用一次，且每道菜一定要有肉，試問食材的分配共有幾種方法？(1) 3 (2) 6 (3) 9 (4) 18 (5) 27

解：

【答】5

題型 6

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、7 個人排成一列，則下列選項哪些是正確的？

- (A) 甲、乙、丙完全不相鄰的排法有 1440 種
- (B) 甲、乙均在丙之左的排法有 1680 種
- (C) 甲不排首、乙不排末、丙不排正中的排法有 3216 種
- (D) 前四位至少有丁、戊、己、庚其中兩位的排法有 4464 種
- (E) 丁、戊之間恰有一人，己、庚之間恰有兩人的排法有 192 種

解：

【答】(A)(B)(C)(D)(E)

題型 7 ~ 數乙 108 多選 5~

考慮如下的九宮格：

1	2	3
4	5	6
7	8	9

編號 1、3、7、9 的四格稱為「角」，編號 2、4、6、8 的四格稱為「邊」，而編號 5 的格子稱為「中心」。在此九格中放入 5 個 O 及 4 個 X 的記號，每一格只能放入一個 O 或一個 X，且任一行(例如位置 1、4、7)、任一列(例如位置 4、5、6)，以及任一對角線(對角線是指位置 1、5、9 或位置 3、5、7)的三個記號不能完全相同(例如位置 1、5、9 不能全為 O 或全為 X)。試選出正確的選項。

- (1) 若在中心放 O，則可能有三個 O 放在邊上
- (2) 若在中心放 O，則一定恰有兩個 O 放在角上
- (3) 若在中心放 X，則一定恰有兩個 X 放在角上
- (4) 中心放 O 的方法共有 8 種
- (5) 中心放 X 的方法共有 4 種

解：

題型 8~學測 106 單選 7~

小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：

- (甲) 每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
 (乙) 連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食

根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？

- (1) 52 (2) 60 (3) 68 (4) 76 (5) 84

解：

【答】2

題型 9~學測 102 單選 5~

將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。_____

- (1) 55 (2) 66 (3) 132 (4) 198 (5) 253

解：

【答】2

(C) 單元演練(七)

題	目
----------	----------

1. () 甲先生、乙先生、丙先生、丁先生四位男士以及 A 小姐、B 小姐、C 小姐、D 小姐四位女士想要混搭兩部計程車，每車載有四名乘客。已知：

- (一) 甲先生與 A 小姐同車
- (二) 乙先生與 B 小姐同車
- (三) C 小姐與 D 小姐不同車

請選出正確的選項。

- (1) A 小姐與 D 小姐必不同車
- (2) 甲先生與 B 小姐必不同車
- (3) 乙先生與丙先生必同車
- (4) 如果乙先生與丁先生同車，則丙先生與 B 小姐必同車
- (5) 如果 D 小姐與乙先生同車，則 C 小姐與 A 小姐必同車

【數乙 105 多選 5】

2. 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設：

- A 為同時有手機與平板電腦的人數
- B 為有手機，但沒有平板電腦的人數
- C 為沒有手機，但有平板電腦的人數
- D 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項。

- (1) $A > B$ (2) $A > C$ (3) $B > C$ (4) $B > D$ (5) $C > D$

【學測 104 多選 10】

3. 設定義 $a \neq -1, 0, 1$, M 集合具有下列兩個性質： ① $a \in M$ ② 若 $x \in M$, 則 $\frac{1+x}{1-x} \in M$,

下列何者為真? _____ (1) M 內元素有無限多個 (2) $\frac{1+a}{1-a} \in M$ (3) $-\frac{1}{a} \in M$

(4) $\frac{a-1}{a+1} \in M$ (5) M 是有限集合.

4. 某商店出售 10 種不同款式的公仔。今甲、乙、丙三人都各自收集公仔，請選出正確的選項。

- (1) 若甲、乙兩人各自收集 6 款公仔，則他們兩人合起來一定會收集到這 10 款不同的公仔
 (2) 若甲、乙兩人各自收集 7 款公仔，則至少有 4 款公仔是兩人都擁有
 (3) 若甲、乙、丙三人各自收集 6 款公仔，則至少有 1 款公仔是三人都擁有
 (4) 若甲、乙、丙三人各自收集 7 款公仔，則至少有 2 款公仔是三人都擁有
 (5) 若甲、乙、丙三人各自收集 8 款公仔，則至少有 4 款公仔是三人都擁有

【數甲 108 多選 6】

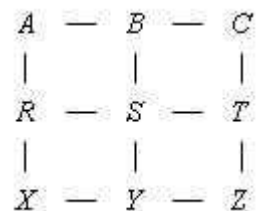
5. 某次選舉中進行甲、乙、丙三項公投案，每項公投案一張選票，投票人可選擇領或不領。投票結束後清點某投票所的選票，發現甲案有 765 人領票、乙案有 537 人領票、丙案有 648 人領票，同時領甲、乙、丙三案公投票的有 224 人，並且每個人都至少領了兩張公投票。根據以上資訊，可知同時領甲、乙兩案但沒有領丙案公投票者共有 _____ 人。

【學測 108 選填 D】

6. 如圖，小華自 S 出發或橫或縱地移動，規定同一符號點不得重複走（即每次移動，當他快要過相同點一次以上時，他就停止）。

(1) 假如他先從 S 移向 B 後，再開始移動，則可以有_____種不同的移動方法。

(2) 他由 S 出發，移動的方法數有_____種。



7. 有一配置一輛運貨車之快遞公司，要將貨品運送至 A, B, C, D, E 五個不同地點。已知這五個地點只有下列連絡道路，其所需時間如下表。例如：路線 $A \leftrightarrow B$ 表示可以由 A 站到 B 站，也可以由 B 站到 A 站，行車時間皆為 1 小時。

路線	$A \leftrightarrow B$	$A \leftrightarrow C$	$A \leftrightarrow D$	$B \leftrightarrow E$	$C \leftrightarrow D$	$C \leftrightarrow E$	$D \leftrightarrow E$
行車時間	1 小時	1 小時	2 小時	5 小時	1 小時	1 小時	1 小時

今有配送任務必須從 A 站出發，最後停留在 E 站，每一站至少經過一次，且路線可以重複，試問至少要花多少小時才能完成任務？

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8

【數乙 107 單選 2】

8. 設 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 為 1, 2, 3, 4, 5 的一種排列，求滿足下列各小題的條件之排列數：

(1) $(1 - b_1)(5 - b_3) = 0$.

(2) $(2 - b_2)(3 - b_3) \neq 0$.

(3) $(1 - b_1)(2 - b_2)(3 - b_3)(4 - b_4)(5 - b_5)$ 為偶數 .

(4) $(1 + b_1)(2 + b_2)(3 + b_3)(4 + b_4)(5 + b_5)$ 為奇數 .

(5) $(1 - b_1)(2 - b_2)(3 - b_3)(4 - b_4)(5 - b_5) \neq 0$.

9. 50 支少棒隊比賽，求下列各比賽方式，各需比賽幾場？

(1)單敗淘汰：_____場。(2)雙敗淘汰：_____場。(3)單循環：_____場。

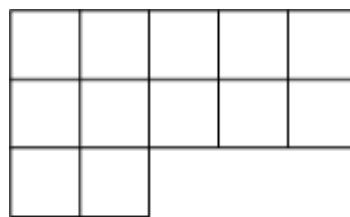
10. 5 個不同的獎品要發給甲、乙、丙、丁 4 個同學，求下列各種分配方法：

(1) 每人可兼得各個獎品，有_____種分法。

(2) 甲至少得一個獎品，有_____種分法。

(3) 甲與乙都至少得一個獎品，有_____種分法。

11. 一個房間的地面是由 12 個正方形所組成，如右圖。今想用長方形瓷磚鋪滿地面，已知每一塊長方形瓷磚可以覆蓋兩個相鄰的正

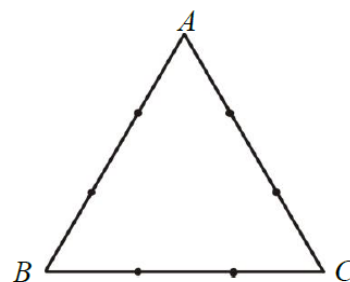


方形，即  或 。則用 6 塊瓷磚鋪滿房間地面的方法有 _____ 種。

【學測 103 選填 F】

12. 三角形 ABC 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項是正確的？

- (1) 依此方法可能連成的三角形一共有 8 個
- (2) 這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形
- (3) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形
- (4) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形
- (5) 這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形



【學測 101 多選 9】

13. 一乒乓球隊有 6 位選手，其中甲、乙、丙為右手持拍的選手，丁、戊為左手持拍的選手，而已為左右手皆可持拍的選手。現在要派出兩名選手參加雙打，規定由一名可以右手持拍的選手與一名可以左手持拍的選手搭配。請問共有多少種可能的搭配？

- (1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13 (5) 15

【數乙 101 單選 3】

14. 棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

(一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；

(二) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；

(三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有_____種先發守備陣容。

（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）

【數乙 99 選填 C】

15. 某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有_____種畫法。

【數乙 98 選填 D】

~參考解答~

【1】 25 【2】 234 【3】 2345 【4】 25 【5】 215 【6】 (1) 8 (2) 32 【7】 2

【8】 (1)42 (2)78 (3) 120 (4) 0 (5) 44 【9】 (1)49 (2) 98 或 99 (3) 1225

【10】 (1)1024 (2) 781 (3) 570 【11】 11 【12】 12 【13】 3 【14】 192 【15】 72

(D) 模擬試題觀摩**題 目**

1. 在一場職業撞球初賽後，前五名進行總決賽，第一場由第五名出戰第四名，輸的人得第五名；贏的人再和第三名比賽一場，輸的人得第四名；贏的人再和第二名比賽一場，輸的人得第三名；贏的人再和第一名比賽一場，贏者為冠軍，輸者為亞軍，依此規則比賽可能產生_____種不同的排名方式。
2. 設 A 、 B 兩人競選「代表」共獲 13 張票，若開票時， A 一直保持領先，而最後以 3 票之多獲勝，則唱票情形有_____種。

~參考解答~

【1】16 【2】297

《單元 8 排列組合(二)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】組合的定義與性質

1. 由 n 個不同物件中，每次選取 m 個為一組，而不論其先後次序，則所有選取方法數稱為組合數，記為 C_m^n 。 $(0 \leq m \leq n, m, n \in \mathbb{Z})$

$$2. C_m^n := \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times m}$$

$$3. C_0^n = 1$$

$$4. C_m^n = C_{n-m}^n \quad \text{【切記】若 } C_m^n = C_x^n, \text{ 則 } x = m \text{ 或 } x = n - m$$

【觀念 2】「組合」恆等式

$$1. \text{ 帕斯卡原理： } C_{m-1}^{n-1} + C_m^{n-1} = C_m^n \quad (1 \leq m \leq n-1)$$

$$2. C_0^n \cdot C_r^m + C_1^n \cdot C_{r-1}^m + \dots + C_r^n \cdot C_0^m = C_r^{m+n}$$

【觀念 3】不盡相異物之排列組合

由 n 個不盡相異物中，選出 m 個的方法數。(見題型說明)

例如：由 *mississippi* 諸字母中每次取 4 個字母排列，則排出的四個字母可能的情形有幾種？

	組合數	排列數
四 同		
三同一異		
二同二異		
二同二同		
四 異		

【觀念 4】分組分堆問題

1. 將 n 個物件依數量分成 m 堆，若其中有 k 堆個數相同，則分組之後需再除以 $k!$
2. 試比較下列兩種分法的差別：

(1) 有六個人，分成兩組打籃球，則分法有幾種？

(2) 有六個人，分成兩組做紅白對抗，問分法有幾種？

【觀念 5】重複組合

1. 意義：自 n 類不同物中，每類至少 m 件，每次從中選取 m 件，每類物品可重複選取，其選法數稱為_____，選法有_____ = _____種。

2. 重複組合與線性方程問題的轉換：

假設於 n 類不同物中，第一類有 m_1 個、第二類有 m_2 個、...、第 n 類有 m_n 個，則從中選出 m 件的方法數即為線性方程式 $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$ 的非負整數解的個數為_____。

3. 對 H_m^n 的解釋：

(1) H_m^n 表「自 n 種不同物中，任意選取 m 件」的重複組合數。

(2) H_m^n 表「把 m 件相同的東西，任意分給 n 個人」的分法數。

(3) 就線性方程式的觀點來看，

H_m^n 表「 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = m$ 的非負整數解」的組數。

(4) 就「置球」的觀點來看，

H_m^n 表「將 m 個相同球，任意放入 n 個不同的箱子」的放法數。

(5) 其他：會以不同形式出現，可將問題轉換成「 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = m$ 之非負整數解」的組數來思考。

【觀念 6】綜合問題

1. 物件相同，箱子相同 \Rightarrow 算整數分割數
2. 物件相異，箱子相同 \Rightarrow 分組分堆
3. 物件相同，箱子相異 \Rightarrow 重複組合
4. 物件相異，箱子相異 \Rightarrow 重複排列

【觀念 7】二項式定理

1. $n \in N$ ， x, y 為任意數，則 $(x+y)^n = C_0^n x^0 y^n + C_1^n x y^{n-1} + \dots + C_n^n x^n y^0 = \sum_{k=0}^n C_k^n x^k y^{n-k}$
2. $C_r^n x^{n-r} y^r$ 稱為 $(x+y)^n$ 的一般項或通項。
3. $C_r^n x^{n-r} y^r$ 是 $(x+y)^n$ 之展開式照 x 降幂排列的第_____項。
4. 特殊情形： $(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \dots + C_r^n x^r + \dots + C_n^n x^n$

(1) 當 $x=1: 2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n$

(2) 當 $x=-1: 0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n - C_3^n \dots + (-1)^n C_n^n$

(3) 當 $x=2: 3^n = C_0^n + 2C_1^n + 2^2 C_2^n + \dots + 2^n C_n^n$

(4) 當 $x=3: 4^n = C_0^n + 3C_1^n + 3^2 C_2^n + \dots + 3^n C_n^n$

$$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow 2^{n-1} = C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots ; \quad \frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow 2^{n-1} = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots$$

$$\therefore C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots = C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots$$

【觀念 8】多項式定理

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m)^n = \sum_{\substack{\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = n \\ 0 \leq \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \leq n}} \frac{n!}{\alpha_0! \alpha_1! \dots \alpha_m!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_m^{\alpha_m} x^{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + m\alpha_m}$$

(B) 綜合題型分析**題型 1**

試求下列各式中的 n 值：

$$(1) C_{n+4}^{36} = C_{3n}^{36} \quad (2) C_3^n = C_2^{n-1} \quad (3) P_4^{n+1} = 84C_3^{n-1} \quad (4) C_3^3 + C_3^4 + C_3^5 + \cdots + C_3^9$$

解：

題型 2

設 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (A) A 之部分集中，含有奇數個元素之集合有 512 個
- (B) A 之部分集中，含有 3 個元素而元素和為奇數者有 60 個
- (C) A 之部分集中，含有 3 個元素而元素和為 3 之倍數者有 42 個

解：

題型 3

有兒童 12 人依下列分組，其方法有幾種？

- (1)分成 A 、 B 、 C 三組各 4 人 (2)平均分成三組
 (3)分成 5 人，5 人，2 人三組 (4)分成 3 人，4 人，5 人三組。

解：

【答】(1)34650 種 (2)5775 種 (3)8316 種 (4)27720 種

題型 4

試求滿足下列條件的方法數：

- (1) 將 6 件相同的物品，分給 4 人，每人可兼得或不得，則分法有_____種。
 (2) 將 6 件相同的物品，分給 4 人，每人至少得 1 件，則分法有_____種。
 (3) 將 6 件不同的物品，分給 4 人，每人可兼得或不得，則分法有_____種。
 (4) 將 6 件不同的物品，分給 4 人，每人至少得 1 件，則分法有_____種。

解：

【答】(1)84 (2)10 (3)4096 (4)1560

題型 5~學測 102 單選 5~

將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子裡都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。

- (A) 55 (B) 66 (C) 132 (D) 198 (E) 253

解：

【答】B

題型 6

將 7 枝鉛筆放入 4 個盒子，每盒可放入 7 枝鉛筆，且可有空盒子，則下列選項哪些是正確的？

- (A)若鉛筆相同且盒子相同，則放入方法有 10 種。
 (B)若鉛筆不同但盒子相同，則放入方法有 715 種。
 (C)若鉛筆相同但盒子不同，則放入方法有 120 種。
 (D)若鉛筆相同但盒子不同，且每盒至少放一枝鉛筆，則放入方法有 20 種。
 (E)若鉛筆不同且盒子不同，每盒至少放入一枝鉛筆，則放入方法有 7200 種。

解：

【答】(B)(C)(D)

題型 7~學測 103 單選 5~

設 $(1+\sqrt{2})^6 = a+b\sqrt{2}$ ，其中 a 、 b 為整數。請問 b 等於下列哪一個選項？

- (1) $C_0^6 + 2C_2^6 + 2^2C_4^6 + 2^3C_6^6$
- (2) $C_1^6 + 2C_3^6 + 2^2C_5^6$
- (3) $C_0^6 + 2C_1^6 + 2^2C_2^6 + 2^3C_3^6 + 2^4C_4^6 + 2^5C_5^6 + 2^6C_6^6$
- (4) $2C_1^6 + 2^2C_3^6 + 2^3C_5^6$
- (5) $C_0^6 + 2^2C_2^6 + 2^4C_4^6 + 2^6C_6^6$

解：

【答】2

題型 8~數乙 101 單選 5~

將 $(x^2 + y)^{12}$ 展開集項後，請選出正確的選項。

- (1) x^{24} 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (2) $x^{12}y^6$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (3) $x^{14}y^5$ 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數
- (4) x^8y^8 的係數小於 $x^{10}y^7$ 的係數

解：

【答】14

(C) 單元演練 (八)

題 目

1. 若 $C_0^9 + C_2^9 + C_4^9 + C_6^9 + C_8^9 = a$ ，且 $C_1^9 + C_3^9 + C_5^9 + C_7^9 + C_9^9 = b$ ，

則下列何者為真? _____。

(1) $a - b = 64$ (2) $2a + b = 1024$ (3) $a + b = 1024$ (4) $b = 256$.

2. 下列各敘述何者為真? _____

(1) 已知 n 為正整數， m, k 為非負整數，且 $n \geq m, n \geq k$ ，若 $C_m^n = C_k^n$ ，則 $m = k$

(2) 設 n 為正整數、 m 為非負整數，且 $n \geq m$ ，則 $P_m^n = (m!) \cdot C_m^n$

(3) 在 1 到 10 的正整數中，任取兩數，若此兩數不連續，則共有 36 種取法

(4) 從 8 個人中選 3 個人，分別擔任整潔評分員、衛生評分員和環保健工的方法有 $\frac{8!}{3!5!}$ 種

(5) 5 顆相同的蘋果，完全分給 8 人，每人至多 1 顆的方法有 $\frac{8!}{3!5!}$ 種。

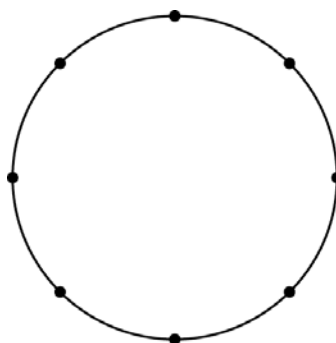
3. 已知圓周上有 8 個不同的點。選出正確的選項：

(1) 這些點可決定 28 條直線

(2) 這些點可決定 56 條射線

(3) 以這些點為頂點可決定 56 個三角形

(4) 以這些點為頂點可決定 70 個四邊形。



4. 設 N 為 V, V, X, X, X, X, X 的直線排列數，則下列何者為真？_____
- (1) 七個人作直線排列，其中甲必在乙之前的排列數為 N
- (2) $(x-1)^7$ 展開中 x^2 的係數為 N
- (3) 將 5 枝相同的筆，分給甲、乙、丙三人，每人所得不限，所有分法有 N 種
- (4) 從集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 中取出二個不連續的數，有 N 種取法
- (5) 袋中有 10 元紙鈔 20 張，100 元紙鈔 10 張，1000 元紙鈔 8 張，由袋中取出 5 張紙鈔，所有可能款項有 N 種。
5. 五種不同的酒，倒入四個酒杯，每個酒杯只能倒入一種酒，下列何者正確？_____
- (1) 若酒杯相異，杯中飲料相異，則所有可能有 4^5 種
- (2) 若酒杯相異，杯中飲料可相同，則所有可能有 H_4^5 種
- (3) 若酒杯相同，杯中飲料相異，則所有可能有 C_4^5 種
- (4) 若酒杯相同，杯中飲料可相同，則所有可能有 H_4^5 種
- (5) 若酒杯相異，杯中飲料相異，則所有可能有 5^4 種。

6 有關 $(x-1)^{20}$ 的展開式，選出正確的選項：_____。

- (1)它是一個 20 次的多項式
- (2)展開式中的每一項係數都是整數
- (3)常數項為 -1
- (4) x^{17} 的係數為 C_3^{20}
- (5) x^{12} 的係數為 C_{12}^{20}

7. 選出答案為 C_3^7 的選項：_____

- (1)從 7 人中選出 3 人接受體能測試的方法數
- (2)甲乙丙三人從 7 本不同的書中，每人各選一本的方法數
- (3)將「 $aaaabbb$ 」共 7 個字母，任意排成一系列的方法數
- (4)在 $(a+b)^7$ 的展開式中， a^4b^3 的係數
- (5)在 $(a+b)^7$ 的展開式中， a^3b^4 的係數。

8. (1)滿足 $6 \leq x+y+z \leq 13$ 之非負整數解， (x, y, z) 共有_____組。

(2)滿足 $xyz = 9000$ 之所有正整數解 (x, y, z) ，共有_____組。

9. 相同的蘋果 4 個，及相同的梨子 6 個，分給甲、乙二人，求下列各方法數：

(1)任意分，方法有_____種。

(2)每人每種至少得 1 個，方法有_____種。

(3)每人至少得 1 個，方法有_____種。

10. 已知甲、乙、丙、丁、…等八人，求下列各種情形的方法數：

(1)任意分成三組，每組至少兩人，則有_____種分法。

(2)若此八人作桌球單打比賽，賽程表如圖所示，且規定第一輪比賽甲、乙不能對打，則共有_____種安排賽程的方式。

11. 今有甲、乙、丙、丁四對夫妻共 8 人，請依下列各種情形回答問題：

(1)從中任選 4 人，至少有 1 個女生的方法有_____種。

(2)這 8 人排成一列，而且女生完全分開的方法有_____種。

(3)這 8 人排成一列，而且每對夫妻中先生都要在自己太太的左方（可不相鄰或相鄰）的方法有_____種。

(4)這 8 人分乘三輛完全相同的車子（每車最多限坐 4 人、最少 1 人）的方法有_____種。
（暫不考慮車內座位順序）

(5)這 8 人分乘三輛相異的車子 A, B, C, 其中 A 車坐 3 人, B 車坐 3 人, C 車坐 2 人, 而且甲夫婦要同車的方法有_____種。（暫不考慮車內座位順序）

12. 化簡 $\frac{1}{1!9!} + \frac{1}{3!7!} + \frac{1}{5!5!} + \frac{1}{7!3!} + \frac{1}{9!1!}$ 得值為 $\frac{2^m}{n!}$ ，其中 m, n 為正整數，求數對 $(m, n) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 籃球 3 人鬥牛賽，共有甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬 9 人參加，組成 3 隊，且甲、乙兩人不在同一的組隊方法有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。

【學測 90 選填 J】

14. 新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢---買一送一」的活動。該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

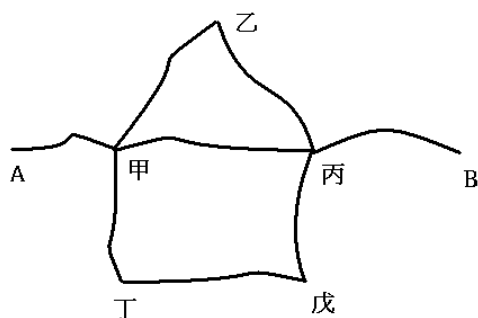
規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格(例如：買一個「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一)。

若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩雙鞋，其搭配

方法一共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 種。

【學測 95 選填 E】

15. 如圖



A城到B城之間有甲、乙、丙、丁、戊五城，其間連結的道路如圖所示。
 今從A城出發走向B城，要求每條道路都要經過並且只經過一次，則總共有_____種走法。
 【數乙 96選填 C】

16.小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種 8 盆，可以不必擺滿，並且每種花至少一盆，則小燦買盆栽的方法共有_____種。
 【學測 104 選填 C】

~參考解答~

- 【1】 4 【2】 235 【3】 1234 【4】 345 【5】 34 【6】 125 【7】 1345 【8】 (1)504 (2) 600
 【9】 (1)35 (2)15 (3)33 【10】 (1)490 (2) 270 【11】 (1)69(2)2880(3)2520(4)770(5)140
 【12】 (9,10) 【13】 210 【14】 21 【15】 6 【16】 70

(D) 模擬試題觀摩

1. 有六本不同的書，則下列各選項的分法何者為真？_____。
- (A)分給甲、乙、丙三人，每人各得兩本，有90種分法
 - (B)分給甲、乙、丙三人，甲得一本，乙得兩本，丙得三本，有60種分法
 - (C)分給三人，一人得一本，一人得兩本，另一人得三本，有360種分法
 - (D)平均分成三份，每份兩本，有15種分法
 - (E)分成三份，一份一本，一份一本，另一份四本，有15種分法。
2. 方法數 $P_4^4 \cdot P_4^4$ 是下列哪一個選項的答案？_____。
- (A)4男4女排成一列，同性不相鄰
 - (B)4男4女排成一列，女性不相鄰
 - (C)4男4女圍成一圈，同性不分開
 - (D)4男4女分成兩組，其中每一組各有2男2女
 - (E)4男4女分別參加四個不同的社團，每個社團1男1女。

~參考解答~

【1】全 【2】CE

《單元 9 機率(一)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】樣本空間與事件

- 1、隨機試驗：在不確定的現象上，求出一個結果的過程，叫作隨機試驗。
- 2、樣本空間：在隨機試驗中一切可能出現的情形_____稱為此試驗之_____ (Sample Space)，通常以 S 表之。
- 3、樣本：樣本空間中的每一個元素稱為樣本(或稱為樣本點 Sample Point)。
- 4、事件：樣本空間 S 的每一個子集均稱為此樣本空間之一事件(Event)，通常以 A 來表示。
- 5、全事件：樣本空間 S _____稱為全事件或必然事件。
- 6、空事件：樣本空間中的_____稱為空事件或_____。
- 7、餘事件：事件 A 以外的事件稱為事件 A 的餘事件，通常以___或___表示。
- 8、和事件：二個事件 A 、 B 至少有一事件發生的事件，稱為 A 、 B 的和事件即_____。
- 9、積事件：二個事件 A 、 B 同時發生的事件，稱為 A 、 B 的積事件即_____。
- 10、互斥事件：二個事件 A 、 B ，若_____即此二事件不同時發生，則稱 A 、 B 為互斥事件。
- 11、單一事件：一個樣本點所成的事件稱為單一事件或_____。
- 12、差事件：兩事件 A 、 B ，若 A 發生且 B 不發生的事件稱為 A 與 B 的差事件即_____。

【觀念 2】機率的定義

設 S 為 n 個樣本點的樣本空間，又假設其中各基本事件出現的機會均等。

若 $A \subset S$ 為一事件，且 A 的元素個數為 k ，則事件 A 發生的機率為 A 之元

素個數 k 與 n 的比值，記作 $P(A)$ 。 $P(A) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【觀念 3】機率的性質

1. (a) $0 \leq P(A) \leq 1$ (b) $P(S) = 1$ (c) 若 $A \cap B = \phi$ ，則_____。

2. 推演性質

(1) 空事件的機率： $P(\phi) = 0$

(2) 餘事件的機率： $P(A^c) = 1 - P(A)$

(3) 機率的單調性：若 $A \subset B$ ，則 $P(A) \leq P(B)$

(4) 機率的排容原理： $P(A \cup B) =$ _____。

3. 重要等式：

(1) $P(A - B) = P(A \cap B') =$ _____ $= P(A \cup B) - P(B)$ 。

$P(B - A) = P(B \cap A') =$ _____ $= P(A \cup B) - P(A)$ 。

～隨堂筆記～

(2) $P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B)$ (狄摩根定理)

$P(A' \cup B') =$ _____ $=$ _____。

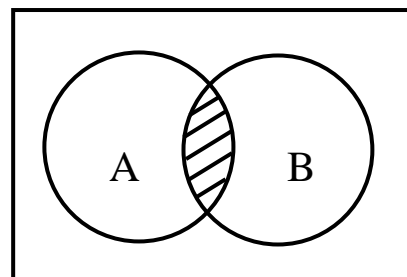
～隨堂筆記～

4. 條件機率：

(1) 定義：條件機率的定義：設 A, B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(B) > 0$ ，則

事件 B 發生之條件下事件 A 發生的機率記作_____。

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



(2) 性質：

(a) $P(\phi|B) = 0$ $P(B|B) = 1$

(b) $0 \leq P(A|B) \leq 1$

(c) $P(A'|B) = 1 - P(A|B)$

(d) $P(A \cup B|C) = \frac{P(A \cap B|C) + P(A|C) + P(B|C)}{P(C)}$

(e) 若 $A \subset B$ ，則 $P(A|C) \leq P(B|C)$

5. 條件機率的乘法原理：若有 A 與 B 兩事件，且 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$

則_____。

(1) 設 $P(A) > 0$ ， $P(A \cap B) > 0$ ，則 $P(A \cap B \cap C) =$

$$P(A \cap B)P(C|A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)}$$

(2) $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

~這片空白留給你~

(B) 綜合題型分析**題型 1**

設 A 、 B 兩事件發生之機率依次為 $P(A)$ 、 $P(B)$ ， A' 表 A 之餘事件，若

$P(A) = \frac{3}{4}$ ， $P(B) = \frac{5}{8}$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (A) $\frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1$ (B) $\frac{5}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{8} \leq P(A - B) \leq \frac{3}{8}$
 (D) $0 \leq P(A' \cap B') \leq \frac{1}{4}$ (E) $0 \leq P(A' - B') \leq \frac{1}{4}$

解：

【答】(A)(C)(D)(E)

題型 2~學測 108 多選 9~

從 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 這七個數字中隨機任取兩數。試選出正確的選項。

- (1) 其和大於 10 的機率為 $\frac{1}{7}$
 (2) 其和小於 5 的機率為 $\frac{1}{7}$
 (3) 其和為奇數的機率為 $\frac{4}{7}$
 (4) 其差為偶數的機率為 $\frac{5}{7}$
 (5) 其積為奇數的機率為 $\frac{2}{7}$

解：

【答】35

題型 3~數乙 108 選填 A~

從三位數中任選一數，寫成 $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ ，其中 a 是 1 到 9 的整數， b 和 c 都是 0 到 9 的整數，則 $a + b + c = 9$ 的機率為_____。(請化成最簡分數)

解：

【答】 $\frac{1}{20}$

題型 4

擲一顆骰子 3 次，設出現的點數依次為 a 、 b 、 c ，則下列選項何者為真？

(A) 其中 $a = b$ 的機率為 $\frac{1}{6}$ (B) 其中 $a < b < c$ 的機率為 $\frac{7}{72}$ (C) 其中 $a \leq b \leq c$ 的機率為 $\frac{7}{27}$

(D) 其中 $a \neq b$ ， $b \neq c$ ， $c \neq a$ 的機率為 $\frac{5}{9}$ (E) 其中 $a + b + c = 9$ 的機率為 $\frac{7}{54}$ 。

解：

【答】 (A)(C)(D)

題型 5~學測 108 多選 11~

某地區衛生機構成功訪問了 500 人，其中年齡為 50-59 歲及 60 歲（含）以上者分別有 220 名及 280 名。這 500 名受訪者中，120 名曾做過大腸癌篩檢，其中有 75 名是在一年之前做的，有 45 名是在一年之內做的。已知受訪者中，60 歲（含）以上者曾做過大腸癌篩檢比率是 50-59 歲者曾做過大腸癌篩檢比率的 3.5 倍。試選出正確的選項。

- (1) 受訪者中年齡為 60 歲（含）以上者超過 60%
- (2) 由受訪者中隨機抽取兩人，此兩人的年齡皆落在 50-59 歲間的機率大於 0.25
- (3) 由曾做過大腸癌篩檢的受訪者中隨機抽取兩人，其中一人在一年之內受檢而另一人在一年之前受檢的機率為 $2 \cdot \left(\frac{45}{120}\right) \left(\frac{75}{119}\right)$
- (4) 這 500 名受訪者中，未曾做過大腸癌篩檢的比率低於 75%
- (5) 受訪者中 60 歲（含）以上者，曾做過大腸癌篩檢的人數超過 90 名

解：

【答】35

題型 6~學測 105 選填 F~

投擲一公正骰子三次，所得的點數依序為 a 、 b 、 c 。在 b 為奇數的條件下，行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$ 的機率為_____。（化成最簡分數）

解：

【答】 $\frac{19}{36}$

題型 7~學測 105 多選 13~

甲、乙、丙、丁四位男生各騎一台機車約 A 、 B 、 C 、 D 四位女生一起出遊，他們約定讓四位女生依照 A 、 B 、 C 、 D 的順序抽鑰匙來決定搭乘哪一位男生的機車。其中除了 B 認得甲的機車鑰匙，並且絕對不會選取之外，每個女生選取這些鑰匙的機會都均等。請選出正確的選項。

- (1) A 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到甲的鑰匙的機率
- (2) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 D 抽到甲的鑰匙的機率
- (3) A 抽到乙的鑰匙的機率大於 B 抽到乙的鑰匙的機率
- (4) B 抽到丙的鑰匙的機率大於 C 抽到丙的鑰匙的機率
- (5) C 抽到甲的鑰匙的機率大於 C 抽到乙的鑰匙的機率

解：

【答】45

題型 8~數乙 103 多選 4~

請選出正確的選項。

- (1) 隨機亂數表的任一系列中，0 到 9 各數字出現的次數皆相同
- (2) 擲一枚均勻的銅板 10 次，若前 5 次出現 3 次正面與 2 次反面，則後 5 次必定出現 2 次正面與 3 次反面
- (3) 投擲一枚均勻的銅板 2 次，在正面至少出現 1 次的條件下，2 次都出現正面的條件機率等於 $\frac{1}{3}$
- (4) 投擲 6 顆公正的骰子，1、2、3、4、5、6 點都出現的機率小於 $\frac{1}{6}$
- (5) 從一副 52 張的撲克牌（紅黑各有 26 張）中，隨機抽取相異的兩張，這兩張牌都是紅色的機率為 $\frac{1}{4}$

解：

【答】2

題型 9~數甲 107 單選 3~

某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有 A 、 B 、 C 三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從 A 、 B 、 C 這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自 C 廠商的機率為何？

- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{10}{23}$ (4) $\frac{10}{19}$ (5) $\frac{5}{9}$

解：

【答】3

題型 10~學測 104 選填 B~

不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、……、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率為_____。(化為最簡分數)

解：

【答】 $\frac{1}{2}$

(C) 單元演練 (九)

題 目

1. _____ 下列各事件發生的機率中，何者為 $\frac{1}{2}$?
- (1) 丟 1 個硬幣，出現正面的機率
 - (2) 丟 1 個硬幣兩次，出現一正一反的機率
 - (3) 同時丟 2 個硬幣，出現一正一反的機率
 - (4) 丟 1 個硬幣四次，出現二正二反的機率
 - (5) 同時丟 4 個硬幣，出現二正二反的機率。
2. _____ 袋中有 3 個不同紅球，4 個不同白球，今自袋中隨機取球，則下列敘述何者正確?
- (1) 只取一球，取到的是紅球的機率為 $\frac{3}{7}$
 - (2) 一次取兩球，只取一次，恰為一紅球一白球的機率為 $\frac{4}{7}$
 - (3) 一次取一球，取後放回，共取兩次，恰為一紅球一白球的機率為 $\frac{12}{49}$
 - (4) 一次取一球，取後不放回，共取兩次，恰為一紅球一白球的機率為 $\frac{4}{7}$
 - (5) 一次取一球，取後不放回，直到所有球都取完，則第二次取到的是白球的機率為 $\frac{4}{7}$ 。

3. 袋中有 39 張大小相同，材質相同的卡片，每張卡片上各有一個號碼，自 1、2、 \dots 、39，
 求 (1)自袋中任取兩張卡片，點數和為偶數的機率為_____。
 (2)自袋中任取兩張卡片，點數和為 28 的機率為_____。
4. 袋中有編號 1, 2, 3, 4, 5, \dots , 9, 10 的卡片各一張，今按甲、乙、丙先後順序，每人
 從袋中取出一張，看完後立刻放回，再輪下一位。設甲、乙、丙分別取得 a, b, c 號，求
 (1)若 a, b, c 中的最大值為 4，則其機率為_____。
 (2)若 a, b, c 中任兩數之差均大於 1，則其機率為_____。
5. 擲四粒公正的骰子，則
 (1)骰子的點數和為 9 的機率為_____。
 (2)至少有兩粒骰子同點數的機率為_____。
 (3)骰子的點數分別為 x, x, y, y ($x \neq y$) 的機率為_____。

6. 某經銷商對甲、乙兩款血壓計作品管檢驗，發現從甲款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg（毫米汞柱）及超過 6mmHg 的機率分別為 0.32 及 0.1。從乙款每一批中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg 及超過 6mmHg 的機率分別為 0.16 及 0.05。在甲、乙兩款的檢驗是獨立事件的情況下，試選出正確的選項。
- (1) 從甲款中抽出一個血壓計，其誤差超過 3mmHg 但不超過 6mmHg 的機率大於 0.2
- (2) 若從待檢驗的甲款血壓計中連續抽兩次，每次抽一個血壓計檢驗後放回，假設這兩次的檢驗是獨立事件，其誤差依次為不超過 3mmHg 及超過 6mmHg 的機率為 0.136
- (3) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，其誤差都不超過 3mmHg 的機率大於 0.7
- (4) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，至少有一個誤差不超過 3mmHg 的機率大於 0.84
- (5) 從甲、乙兩款中各抽出一個血壓計，兩者誤差的平均超過 3mmHg 的機率小於 0.32×0.16
- 【數乙 107 多選 6】

7. 台北銀行最早發行的樂透彩（俗稱小樂透）的玩法是「42 選 6」：購買者從 01~42 中任選六個號碼，當這六個號碼與開出的六個號碼完全相同（不計次序）時即得頭獎；台北銀行曾考慮改發行「39 選 5」的小小樂透：購買者從 01~39 中任選五個號碼，如果這五個號碼與開出的五個號碼完全相同（不計次序）則得頭獎。假設原來的小樂透中頭獎的機率是 R ，而曾考慮發行的小小樂透中頭獎的機率是 r 。試問此值 $\frac{r}{R}$ 最接近下列哪個選項？
- _____ (1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11 .
- 【學測 94 單選 3】

8. 保險公司把投保竊盜險的住宅分為 A 、 B 兩級，其所占比率分別為 60%、40%。過去一年 A 、 B 兩級住宅遭竊的比率分別為 15%、5%。據此，公司推估未來一年 A 、 B 兩級住宅被竊的機率分別為 0.15、0.05。今 A 級住宅中的 20% 經過改善，重新推估這些改善過的住宅未來一年被竊的機率會降為 0.03；而其他住宅被竊機率不變。根據以上資料，試選出正確的選項。

- (1) 全體投保的住宅中，過去一年遭竊的比率為 12%
- (2) 過去一年遭竊的投保住宅中， A 級所占的比率超過 90%
- (3) 推估未來一年，改善過的 A 級住宅的被竊機率為原來的 $\frac{1}{5}$
- (4) 經改善後，推估未來一年被竊機率，全體投保的 A 級住宅會小於全體投保的 B 級住宅
- (5) 經改善後，推估未來一年全體投保的住宅被竊機率小於 0.11

【數乙 107 多選 7】

9. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？_____

- (1) 每班至少會有一人被抽中
- (2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多
- (3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率
- (4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣
- (5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{100}$ 。

【學測 97 多選 7】

10. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局為止。試問下列哪些選項是正確的？_____。

- (1) 第一局甲就出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (2) 第一局就有人出局的機率是 $\frac{1}{2}$
- (3) 第三局才有人出局的機率是 $\frac{3}{64}$
- (4) 已知到第十局才有人出局，則甲出局的機率是 $\frac{1}{3}$
- (5) 該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於 $\frac{1}{1000}$ 。

【數甲 97 多選 4】

11. 某校要從高一的「忠、孝、仁、愛」四個班級中隨機選取一個班級進行數學抽測。考慮甲、乙兩種抽樣方法：甲方法是從四個班級的導師中隨機選取一人，被選中導師的班級為抽測班級；乙方法是從所有高一學生中隨機選取一名學生，被選中學生的班級為抽測班級。若各班人數都不相同，其中「愛」班人數最多。則下列敘述有哪些是正確的？_____

- (1) 甲方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
- (2) 乙方法中，每位高一學生被抽測的機率相等
- (3) 甲方法中，四個班級被抽測的機率相等
- (4) 乙方法中，四個班級被抽測的機率相等
- (5) 「愛」班被抽測的機率，使用甲方法較使用乙方法高。

【數乙 93 多選 6】

12. 從 1, 2, …, 10 這十個數中隨意取兩個, 以 p 表示其和為偶數之機率, q 表示其和為奇數之機率. 請問下列哪些敘述是正確的? _____。

(1) $p + q = 1$ (2) $p = q$ (3) $|p - q| \leq \frac{1}{10}$ (4) $|p - q| \geq \frac{1}{20}$ (5) $p \geq \frac{1}{2}$.

【學測 93 多選 10】

13. 有一個不公正的骰子, 投擲的時候, 二點、三點、四點、五點和六點出現的機率都是 $\log_{10}(\frac{3}{2})$, 今以 a 表 $\log_{10}(\frac{3}{2})$, 以 b 表投擲的時候一點出現的機率, 請選出正確的選項: _____

(1) $a > 0$ (2) $a > 1$ (3) $b < \frac{1}{6}$ (4) $b < \log_{10}(\frac{4}{3})$ (5) $a > b$.

【數乙 97 多選 4】

14. 抽樣調查某地區 1000 個有兩個小孩的家庭, 得到如下數據, 其中(男,女)代表第一個小孩是男孩而第二個小孩是女生的家庭, 餘類推 .

家庭別	家庭數
(男, 男)	261
(男, 女)	249
(女, 男)	255
(女, 女)	235

由此數據可估計該地區有兩個小孩家庭的男、女孩性別比約為_____ : 100 .

(四捨五入至整數位)

【學測 95 選填 A】

15. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有_____。(化成最簡分數) 【學測 92 選填 B】

16. 某甲上班可採全程步行或全程騎腳踏車兩種方式通勤，其中步行的通勤時間為 60 分鐘，騎腳踏車的通勤時間以整數計時為 T 分鐘。其中 $30 \leq T \leq 40$ ，且 T 分為五個區間，其出現在各區間的機率如下表：

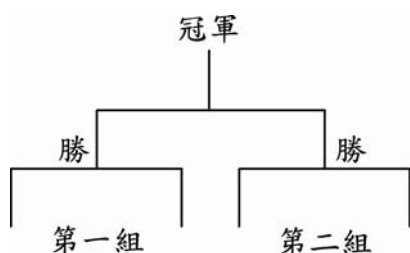
通勤時間	$30 \leq T < 32$	$32 \leq T < 34$	$34 \leq T < 36$	$36 \leq T < 38$	$38 \leq T \leq 40$
機率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

例如：騎腳踏車通勤時間 T 滿足區間 $32 \leq T < 34$ 的機率為 0.2。假設甲每天通勤時間互相獨立。根據上述資料，試選出正確選項。

- (1) 若甲某一天騎腳踏車上班，則其通勤時間少於 35 分鐘的機率是 0.5
- (2) 若甲某五天皆騎腳踏車上班，則這五天上班的通勤總時間一定會少於四天騎腳踏車另一天步行的通勤總時間。
- (3) 若甲某五天上班的通勤總時間為 250 分鐘，則這五天中甲一定是三天步行，兩天騎腳踏車。
- (4) 若甲每天投擲一公正銅板來決定步行或騎腳踏車上班，正面則步行，反面則騎腳踏車，則甲兩天的通勤總時間至少 90 分鐘的機率是 0.75
- (5) 若甲有兩天皆騎腳踏車上班，則甲這兩天的通勤總時間至少為 76 分鐘的機率是 0.01

【數乙 108 多選 7】

17. 某棒球比賽有實力完全相當的甲乙丙丁四隊參加，先將四隊隨機抽籤分成兩組比賽，兩組的勝隊再參加冠亞軍決賽。如下圖：



根據過去的紀錄，所有隊伍比賽時各隊獲勝的機率均為 0.5。則冠亞軍決賽由甲、乙兩隊對戰的機率為_____。(四捨五入到小數第三位)

【數乙 96 選填 A】

18. 袋中有 2 顆紅球，3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。

- (1) 「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
- (2) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
- (3) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
- (4) 「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
- (5) 「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率。

【數甲 108 多選 5】

19. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內；

以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得

$P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，則：

- (1) $r =$ _____, (2) $s =$ _____。(化成最簡分數)

【數甲 95 選填 D】

20. 一份試卷共有 10 題單選題，每題有 5 個選項，其中只有一個選項是正確答案。假設小明以隨機猜答的方式回答此試卷，且各題猜答方式互不影響。試估計小明全部答對的機率最接近下列哪一選項？
- (1) 10^{-5} (2) 10^{-6} (3) 10^{-7} (4) 10^{-8} (5) 10^{-9}

【學測 107 單選 2】

- 21 某公司規定員工可在一星期（七天）當中選擇兩天休假。若甲、乙兩人隨機選擇休假日且兩人的選擇互不相關，試問一星期當中發生兩人在同一天休假的機率為何？(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{8}{21}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{10}{21}$ (5) $\frac{11}{21}$

【學測 107 單選 3】

22. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為_____。(化成最簡分數)

【學測 106 選填 F】

~參考解答~

$$\text{【1】 } 123 \text{ 【2】 } 1245 \text{ 【3】 } (1) \frac{19}{39} (2) \frac{1}{57} \text{ 【4】 } (1) \frac{37}{1000} (2) \frac{42}{125} \text{ 【5】 } (1) \frac{7}{162} (2) \frac{13}{18} (3) \frac{5}{72}$$

$$\text{【6】 } 14 \text{ 【7】 } 4 \text{ 【8】 } 35 \text{ 【9】 } 45 \text{ 【10】 } 34 \text{ 【11】 } 13 \text{ 【12】 } 14 \text{ 【13】 } 1345 \text{ 【14】 } 105 \text{ 【15】 } \frac{1}{12}$$

$$\text{【16】 } 34 \text{ 【17】 } 0.167 \text{ 【18】 } 15 \text{ 【19】 } (1) \frac{5}{9} (2) -\frac{1}{9} \text{ 【20】 } 3 \text{ 【21】 } 22 \text{ 【22】 } \frac{9}{64}$$

(D) 模擬試題觀摩

1. 一個細菌 1 分鐘以後變成 2 個、1 個、0 個的機率分別為 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{6}$ ，則一個細菌 2 分鐘之後變成 2 個的機率為_____。
2. 從四對夫婦中任選 4 人，若每人被選中的機率相等，且 4 人均不為夫婦的機率為 p ，又 4 人恰有一對夫婦的機率為 q ，則 $p+q =$ _____。
3. 袋中有大小相同的 6 個白球與 n 個紅球 ($n \geq 2$)，自袋中一次任取三球，其為 1 白球 2 紅球的機率為 P_n ，則： P_n 的最大值為_____，此時 $n =$ _____。

~參考解答~

【1】 $\frac{11}{36}$ 【2】 $\frac{32}{35}$ 【3】 $\frac{33}{68}$ ，11 或 12

～單元筆記～

《單元 10 機率(二)~數據分析(一)》

(A) 公式與觀念整理

【觀念 1】重覆試驗

在一次隨機試驗中，設成功的機率為 p ，失敗的機率為 q ，($p+q=1$)，

若進行 n 次試驗中恰有 r 次成功的機率為 _____。

至少有一次成功的機率為_____ = _____。

【觀念 2】獨立事件

1. 設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，若 A 事件發生的機率，不因 B 事件發生而影響即_____，則稱 A 與 B 無相關。
2. 定義：設 A 、 B 為樣本空間 S 中的任兩事件。若_____則稱 A 、 B 為獨立事件，否則稱為相關事件。
3. 性質：設 A 、 B 為樣本空間 S 中的兩個事件，若 A 與 B 是獨立事件。

(a) A 與 \bar{B} 獨立 (b) \bar{A} 與 B 獨立 (c) \bar{A} 與 \bar{B} 獨立

~推導過程~

4. 三事件獨立：

若下列對任意之事件 A 、 B 、 C 均成立，則稱 A 、 B 、 C 三事件獨立。

- (a) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ (b) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
 (c) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ (d) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

【觀念 3】貝氏定理

1. 分割的定義：

設 S 為有限樣本空間， A_1, A_2, \dots, A_n 為 S 中的非空事件，若滿足

(i) _____

(ii) _____ $i \neq j, i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

則稱 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割。

2. 全機率定理：(貝氏定理的預備定理)

設 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割， $B \subset S$

則 $P(B) =$ _____。

3. 貝氏定理

設 $\{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割， $B \subset S$ ， $P(B) > 0$ ， $P(A_i) > 0$ ，

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ ，則對某一事件 A_k ， $1 \leq k \leq n$

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)} \quad \text{稱為「貝士定理」。}$$

【說明】 可善用樹形圖解貝氏定理問題。

【觀念 4】未分組資料求均量

n 個數字由小而大依次排列為 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，規定：

1. 眾數：出現次數最多的數字。如：1、1、2、3、3、5、6 的眾數為 1 與 3。

2. 中位數：恰在中央的數稱為中位數，記為 Me 。

Case1：若 n 為奇數，則 $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ ；

Case2：若 n 為偶數，則 $M_e = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$ 。

例如：1、1、2、3、5、6 的中位數為_____；

1、1、2、3、5 的中位數為_____。

3. 算術平均數：

此 n 個資料的算術平均數為 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ ，為最常用到的平均數。求平均數要

善用平移的技巧較好算。

~說明~

(I) 平移技巧： $\bar{x} = A + \frac{1}{n}[(x_1 - A) + (x_2 - A) + \dots + (x_n - A)]$

其中 A 為任意的固定數

(II) $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \dots + (x_n - x)^2$ ，在 $x =$ _____ 時

有最小值，此最小值為_____。

4. 加權平均數：

設一組變量 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n ，若 W_i 表示 x_i 之加權數，則加權平均數為

$$W = \frac{W_1x_1 + W_2x_2 + \dots + W_nx_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n}$$

【說明】加權平均數常用來計算學期總平均。

5. 幾何平均數：若一組變量 x_1 、 x_2 、 \dots 、 x_n ， $x_i > 0 (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ ，

其幾何平均數 $G.M.$ 定義為_____。

【觀念 5】未分組資料求差量

n 個數字由小而大排列為 x_1 、 x_2 、 x_3 、 \dots 、 x_n ，規定：

1. 全距：為最大與最小的差，即 $x_n - x_1$ 。若全距為 0 則所有數字都一樣大。

2. 母體變異數： $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$

3. 母體標準差： $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$

~ 這片空白留給你 ~

(B) 綜合題型分析**題型 1~學測 104 單選 3~**

有兩組供機器運作的配件 A 、 B ，其單獨發生故障的機率分別為 0.1 、 0.15 。只有當 A 、 B 都發生故障時，此機器才無法運作。 A 、 B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：

(一)將 B 串接於 A 之後 (二) 將 A 串接於 B 之後 (三)將 A 、 B 獨立並列
在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 p_1 、 p_2 、 p_3 。

請選出正確的選項。

- (1) $p_1 > p_2 > p_3$ (2) $p_2 > p_1 > p_3$ (3) $p_3 > p_2 > p_1$
(4) $p_3 > p_1 > p_2$ (5) $p_1 = p_2 > p_3$

解：

【答】 2

題型 2

如下圖(一)，甲由 A 往 B ，乙由 B 往 A ，兩人同時出發，速率相同，且都走捷徑。

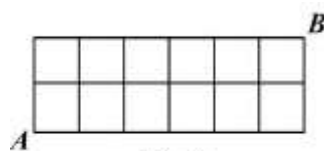
(1) 若在分叉點各方向的選擇機會均等，求兩人相遇的機率為_____。

(2) 若每條捷徑路線的選擇機會均等，求兩人相遇的機率為_____。

解： (1) 如圖(二)， P 、 Q 、 R 為甲、乙兩人會相遇的位置，則 $P(A \rightarrow R) = P(B \rightarrow P) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$P(A \rightarrow Q) = P(B \rightarrow Q) = \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}$$

$$P(A \rightarrow P) = P(B \rightarrow R) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{4}{16} = \frac{11}{16}$$

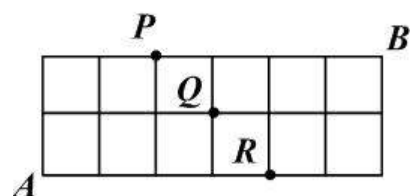


圖(一)

故甲乙兩人在 P 點相遇的機率 =

Q 點相遇的機率 =

R 點相遇的機率 =



圖(二)

因此 甲乙兩人相遇的機率為 $\frac{11}{256} + \frac{16}{256} + \frac{11}{256} = \frac{38}{256} = \frac{19}{128}$

(2) 由 A 至 B 走捷徑的方法數有 $\frac{8!}{6!2!} = 28$ 種

$$\text{故 } P(A \rightarrow P \rightarrow B) = \frac{4!}{2!2!} \times 1 = \frac{6 \times 1}{28}, \quad P(A \rightarrow Q \rightarrow B) = \frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = \frac{16}{28}$$

$$P(A \rightarrow R \rightarrow B) = \frac{1 \times 4!}{2! \times 2!} = \frac{1 \times 6}{28}$$

2° 甲乙於 P 點相遇的機率 =

甲乙於 Q 點相遇的機率 =

甲乙於 R 點相遇的機率 =

因此，甲乙兩人相遇的機率為 $\frac{9}{196} + \frac{64}{196} + \frac{9}{196} = \frac{82}{196} = \frac{41}{98}$

題型 3~數甲 104 多選 8~

被診斷為不孕症的患者，可分為兩類：第一類為可藉人工方式受孕；其餘患者為第二類，無法藉由人工方式受孕。第一類在不孕症的患者中所佔比例為 p ($0 < p < 1$)，而每做一次人工受孕成功的機率為 q ($0 < q < 1$)，且每次成功與否互相獨立。不孕症的患者除非人工受孕成功，否則無法得知是屬於哪一類的患者。請選出正確的選項。

- (1) 不孕症的患者，第一次人工受孕失敗的機率為 $(1-p)(1-q)$
- (2) 在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率為 $\frac{1-p}{1-pq}$
- (3) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在人工受孕失敗一次的情況下，屬於第二類不孕症患者的條件機率會降低
- (4) 在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率大於做兩次才成功的機率
- (5) 若醫學進步，讓人工受孕成功的機率 q 提高了，則在第一類的患者中，做一次人工受孕就成功的機率會增加，而做兩次才成功的機率會降低

解：

【答】24

題型 4

甲說實話之機率為 $\frac{7}{10}$ ，乙說實話之機率為 $\frac{9}{10}$ 。今有一袋內藏 3 白球 7 黑球，自袋中任取一球，甲、乙均說是白球，則此球確為白球之機率為_____。

解：

【答】 $\frac{9}{10}$

題型 5 ~ 數乙 106 多選 7~

小明參加某次國文、英文、數學、自然、社會五個科目的測驗，每一科的分數均為 0~100 分。已知小明國英數三科的分數分別為 75, 80, 85 分。試問下列哪些選項會讓小明五科成績的平均不低於 80 分且五科標準差不大

於 5 分？（註：標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}$ ，其中 μ 為平均數。）

- (1) 自然 75 分，社會 80 分
- (2) 自然與社會兩科皆 80 分
- (3) 自然與社會的平均 85 分
- (4) 自然與社會兩科之和不低於 160 分且兩科差距不超過 10 分
- (5) 自然與社會兩科的分數都介於 80 與 82 分之間

解：

【答】25

題型 6 ~ 學測 106 單選 1 ~

已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為 r_1 ，而學生玩過的比率為 r_2 ，其中 $r_1 \neq r_2$ 。

由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之

- 選項。
- (1) 全校老師與學生比率 (2) 全校老師人數 (3) 全校學生人數
- (4) 全校師生人數 (5) 全校師生玩過「寶可夢」人數

解：

【答】1

題型 7~學測 105 多選 11 ~

一個 41 人的班級某次數學考試，每個人的成績都未超過 59 分。老師決定以下列方式調整成績：原始成績為 x 分的學生，新成績調整為 $40\log_{10}\left(\frac{x+1}{10}\right)+60$ 分（四捨五入到整數）。請選出正確的選項。

- (1) 若某人原始成績是 9 分，則新成績為 60 分
- (2) 若某人原始成績超過 20 分，則其新成績超過 70 分
- (3) 調整後全班成績的全距比原始成績的全距大
- (4) 已知小文的原始成績恰等於全班原始成績的中位數，則小文的新成績仍然等於調整後全班成績的中位數
- (5) 已知小美的原始成績恰等於全班原始成績的平均，則小美的新成績仍然等於調整後全班成績的平均（四捨五入到整數）

解：

【答】124

題型 8~數乙 92 多選 8~

SARS 疫情期間，為了建立指標顯示疫情已受控制，以便向國人宣示可以過正常生活，有位公共衛生專家建議的指標是『連續 7 天，每天新增的可能病例都不超過(小於或等於)5 人』。根據連續 7 天的新增病例計算，下列各選項，哪些必定符合此指標？

- (1) 平均數 ≤ 3
- (2) 標準差 ≤ 1
- (3) 平均數 ≤ 3 且標準差 ≤ 2
- (4) 平均數 ≤ 3 且全距 ≤ 2
- (5) 眾數 = 1 且全距 ≤ 4

解：

【答】45

題型 9~數乙 105 多選 8~

某社區有一千位居民，其個人月所得少於 10,000 元者占 30%，介於 10,000 元及 20,000 元間者占 10%，介於 20,000 元及 40,000 元間者占 30%，介於 40,000 元及 80,000 元間者占 30%。請選出正確的選項。

- (1) 該社區個人月所得的中位數介於 20,000 元及 40,000 元間
- (2) 使用簡單隨機抽樣自該社區中抽出一位居民，其個人月所得在上述的四個區間中，以介於 10,000 元及 20,000 元間的機率最低
- (3) 該社區的個人月所得平均，不可能高過 40,000 元
- (4) 該社區的個人月所得平均，不可能低過該社區的個人月所得中位數
- (5) 若該社區新搬入一位居民，其月所得為 200,000 元，則該社區的個人月所得平均將增加，但增加量不會多過 200 元

解：

【答】125

題型 10~數甲 92 多選 7~

有一筆統計資料，共有 11 個數據如下（不完全依大小排列）：

2, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 11, x 和 y ,

已知這些數據的算術平均數和中位數都是 6，且 x 小於 y 。請選出正確的選項。

- (1) $x+y=14$ (2) $y<9$ (3) $y>8$ (4) 標準差至少是 3

解：

【答】12

(C) 單元演練 (十)

題 目

1. 設 9 枝籤中有 4 枝籤是有獎的，今有甲、乙、丙三人，按甲、乙、丙的順序各抽出一枝籤，抽出後不再放回。選出正確的選項：_____

(1) 甲、乙均抽中有獎籤的機率為 $\frac{1}{6}$

(2) 若已知甲抽中的條件下，則乙沒抽中的機率為 $\frac{5}{18}$

(3) 丙抽中的機率為 $\frac{4}{9}$

(4) 若已知恰有一人抽中的條件下，則是丙抽中的機率為 $\frac{1}{3}$ 。

2. 設整數 x, y, z 為偶數的機率分別為 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ，則下列何者為真？_____

(1) $x + y + z$ 為偶數的機率為 $\frac{1}{2}$ (2) $x + y + z$ 為奇數的機率為 $\frac{1}{2}$ (3) xyz 為偶數的機率為 $\frac{3}{4}$

(4) $xy + z$ 為偶數的機率為 $\frac{5}{12}$ (5) $2x + yz$ 為奇數的機率為 $\frac{1}{2}$ 。

3. 已知小明在罰球線上投籃的命中率為 $\frac{2}{3}$ ，且每次罰球都是獨立事件，則下列何者正確？

(1) 小明投 2 次皆中的機率為 $\frac{4}{9}$

(2) 小明投 5 次恰中 2 次的機率為 $\frac{4}{243}$

(3) 小明投 5 次，恰在第 5 次中第 3 個球的機率為 $\frac{16}{81}$

(4) 小明投 5 次，中球次數的期望值為 3

(5) 小明投 5 次，至少中一球的機率超過 99%。

4. 設一袋中有 10 球，其中只有 3 球是白色，每次從袋中取一球，每球被取到的機會均等，取後不放回，連續取四次，設 A 表第一次取到白球的事件， B 表第三次取到白球的事件， C 表取四次球中有三次為白球的事件，則下列選項何者正確？_____
- (1) $P(A) = \frac{3}{10}$ (2) $P(B|A) = \frac{2}{9}$ (3) $P(C|A) = \frac{1}{12}$
- (4) 事件 A 與事件 B 為獨立事件 (5) $P(A) = P(B)$.
5. 設某工廠由甲、乙、丙三台機器製造某一產品．甲生產全部產品的 50%，乙生產全部產品的 30%，丙生產全部產品的 20%．又依過去的經驗知甲的產品中有 3%，乙有 4%，丙有 5% 為不良品，從產品中任選一產品，則_____
- (1) 選出的產品為不良品的機率為 3.7%
- (2) 若該產品為不良品，求此產品由甲製造的機率為 $\frac{15}{100}$
- (3) 若該產品為不良品，求此產品由乙製造的機率為 $\frac{12}{100}$
- (4) 若該產品為不良品，求此產品由丙製造的機率為 $\frac{1}{10}$
- (5) 若該產品為不良品，求此產品由乙或丙製造的機率為 $\frac{22}{37}$.

6. 甲袋中有 2 個紅球、3 個白球，乙袋中有 3 個紅球、2 個白球，丙袋中有 5 個白球，擲骰子一次，若出現點數為 1，則從甲袋抽出兩球，若出現點數為 2 或 3，則從乙袋抽出兩球，若出現點數為 4、5 或 6，則從丙袋抽出兩球，則

(1)兩球異色的機率為_____ . (2)已知兩球同色，則兩球來自丙袋的機率為_____ .

7. 某地區 12 歲以上人口中吸煙的比率為 28% . 今將 12 歲以上人口區分為中老年、青壯年及青少年三類，所占比率各為 30%，45% 及 25% . 已知中老年與青壯年人口中吸煙的比率各為 25% 與 30%，若青少年人口中吸煙的比率為 $x\%$ ，則 $x =$ _____ .

8. 考慮下列四組數據：

A : 1, 2, 3, 4, 5;

B : 2, 4, 6, 8, 10;

C : 996, 997, 998, 999, 1000; D : 1, 4, 9, 16, 25;

其標準差分別為 σ_A 、 σ_B 、 σ_C 、 σ_D ，則下列選項哪些是正確的? _____

(1) $\sigma_B = 2\sigma_A$ (2) $\sigma_C = \sigma_A$ (3) $\sigma_C > \sigma_A$ (4) $\sigma_D > \sigma_A$ (5) $\sigma_D = \sigma_A^2$.

9. 宴會在場的 50 位賓客有人偷了主人的珠寶，由於賓客身上都沒有珠寶，而且他們都不承認偷竊。警方決定動用測謊器，並且只問客人一個問題：

「你有沒有偷珠寶？」。已知若某人說謊，則測謊器顯示他說謊的機率為 99%；

若某人誠實，則測謊器顯示他誠實的機率是 90%。下列敘述何者正確？_____

- (1)設竊賊只有一人。當賓客受測時，測謊器顯示賓客說謊的機率大於 10%
- (2)設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客正是竊賊的機率大於 50%
- (3)設竊賊只有一人，當測謊器顯示一賓客誠實時，該賓客卻是竊賊的機率小於 20%
- (4)當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客是竊賊的機率，並不因竊賊人數多少而改變。

【數甲 94 多選 7】

10. 醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4%的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢為患有該病。已知全部男性人口中有 0.2%的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。請問下列哪些敘述為真？_____。

- (1)該役男確實染病的機率大於 3%
- (2)該役男確實染病的機率大於 4%
- (3)該役男確實染病的機率大於 5%
- (4)該役男確實染病的機率大於 90%。

【91 指考甲】

11. 某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。

由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$ ，其中 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，

為了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若為不良品，

則此不良品是來自第五個工廠的機率為_____。（化成最簡分數）

【數甲 96 選填 A】

12. 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受

此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判

斷為未患老年癡呆症者有 665 人，其中真正未患老年癡呆症有 660 人。

試問此血液偵測技術的誤判率為_____。（化成最簡分數）

【數乙 98 選填 B】

13. 擲一枚均勻硬幣 4 次，恰好出現 n 次正面的機率記為 a_n ，擲一枚均勻硬幣 8 次，恰好出現 n

次正面的機率記為 b_n 。試問以下哪些選項是正確的？_____

(1) $a_2 = \frac{1}{2}$ (2) $a_2 = b_4$ (3) $b_2 = b_6$ (4) $a_3 > b_3$ (5) $b_0, b_1, b_2, \dots, b_8$ 中的最大值是 b_4

【數甲 95 多選 1】

14. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。

一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為 x 時，華氏溫度為 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏_____度，標準差是華氏_____度。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

【學測 92 選填 I】

15. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：

先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為_____。

【學測 96 選填 C】

16. 所謂某個年齡範圍的失業率，是指該年齡範圍的失業人數與勞動力人數之比，以百分數表達（進行統計分析時，所有年齡以整數表示）。下表為去年某國四個年齡範圍的失業率，其中的年齡範圍有所重疊。

年齡範圍	35~44 歲	35~39 歲	40~44 歲	45~49 歲
失業率	12.66(%)	9.80(%)	13.17(%)	7.08(%)

請根據上表選出正確的選項。

- (1) 在上述四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率為最高
- (2) 40~44 歲勞動力人數多於 45~49 歲勞動力人數
- (3) 40~49 歲的失業率等於 $\left(\frac{13.17 + 7.08}{2}\right)\%$
- (4) 35~39 歲勞動力人數少於 40~44 歲勞動力人數
- (5) 如果 40~44 歲的失業率降低，則 45~49 歲的失業率會升高

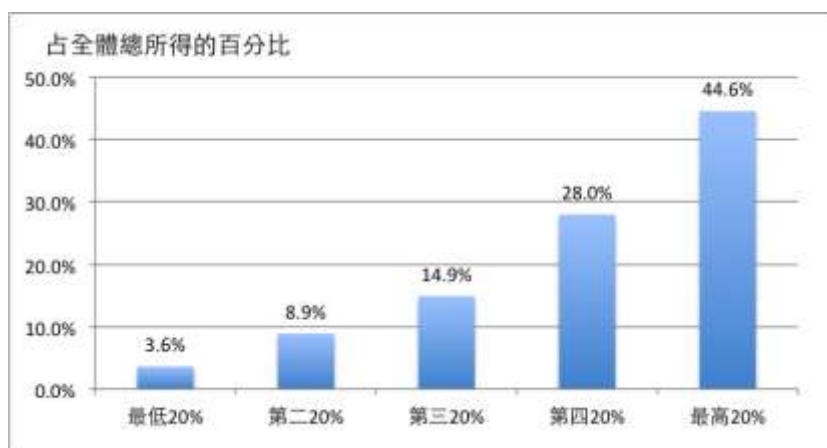
【學測 103 多選 12】

17. 某班有 41 名學生，已知某次考試成績全班的平均分數為 64，最高分為 97，最低分為 24。欲將全班學生成績做線性調整（調整後分數 = $a + b \times$ 原始分數，其中 $b > 0$ ）使得最高分為 100 及最低分為 50。請選出正確的選項。

- (1) 調整後分數的平均值較原始分數的平均值低
- (2) 調整後分數的中位數和原始分數的中位數一樣
- (3) 調整後分數的中位數較原始分數的中位數高
- (4) 調整後分數的標準差和原始分數的標準差一樣
- (5) 調整後分數的標準差較原始分數的標準差大

【數乙 103 單選 2】

18. 所謂個人稅前所得，是指納稅義務人在納稅前之個人所得，以下簡稱所得。依照某國 1997 年的官方資料，依每人所得高低將人數等分為 5 組，最高 20% 的人的總所得占全體總所得的 44.6%，而最低 20% 的人的總所得占全體總所得的 3.6%，所有資料如下圖所示。所得差距倍數是指最高 20% 的個人平均所得與最低 20% 的個人平均所得的比值。請選出正確的選項。



- (1) 此項資料顯示所得差距倍數超過 13 倍
- (2) 最高 30% 的人的總所得超過全體總所得的 55%
- (3) 最少有 60% 的人，其個人所得低於全體平均所得
- (4) 最低 20% 的人的平均所得為全體平均所得的 3.6%

【數乙 101 單選 7】

19. 根據台灣壽險業的資料，男性從 0 歲、1 歲、...到 60 歲各年齡層的死亡率(單位：%)依序為
 1.0250, 0.2350, 0.1520, 0.1010, 0.0720, 0.0590, 0.0550, 0.0540, 0.0540,
 0.0520, 0.0490, 0.0470, 0.0490, 0.0560, 0.0759, 0.1029, 0.1394, 0.1890,
 0.2034, 0.2123, 0.2164, 0.2166, 0.2137, 0.2085, 0.2019, 0.1948, 0.1882,
 0.1830, 0.1799, 0.1793, 0.1813, 0.1862, 0.1941, 0.2051, 0.2190, 0.2354,
 0.2539, 0.2742, 0.2961, 0.3202, 0.3472, 0.3779, 0.4129, 0.4527, 0.4962,
 0.5420, 0.5886, 0.6346, 0.6791, 0.7239, 0.7711, 0.8229, 0.8817, 0.9493,
 1.0268, 1.1148, 1.2139, 1.3250, 1.4485, 1.5851, 1.7353。

經初步整理後，已知 61 個資料中共有 24 個資料小於 0.2。請問死亡率資料的中位數為下列
 哪一個選項？ (1) 0.2034 (2) 0.2164 (3) 0.2137 (4) 0.2085 (5) 0.2019

【學測 100 單選 6】

20. 某大學數學系甄選入學的篩選方式如下：

先就學科能力測驗國文、英文和社會這三科成績（級分）加總做第一次篩選。然後從通過篩選的學生當中，以自然科的成績做第二次篩選。

最後再從通過的學生當中，以數學科的成績做第三次篩選，選出一些學生參加面試。現在有五位報名該系的學生的學科能力測驗成績如下表：

學生	國文級分	英文級分	數學級分	社會級分	自然級分
甲	13	8	14	15	11
乙	12	12	12	12	12
丙	9	13	15	8	15
丁	11	12	13	10	13
戊	13	15	11	7	12

已知這五位學生當中，通過第一次篩選的有四位，通過第二次篩選的有三位，通過第三次篩選可以參加面試的只剩下一位。請問哪一位學生參加面試？

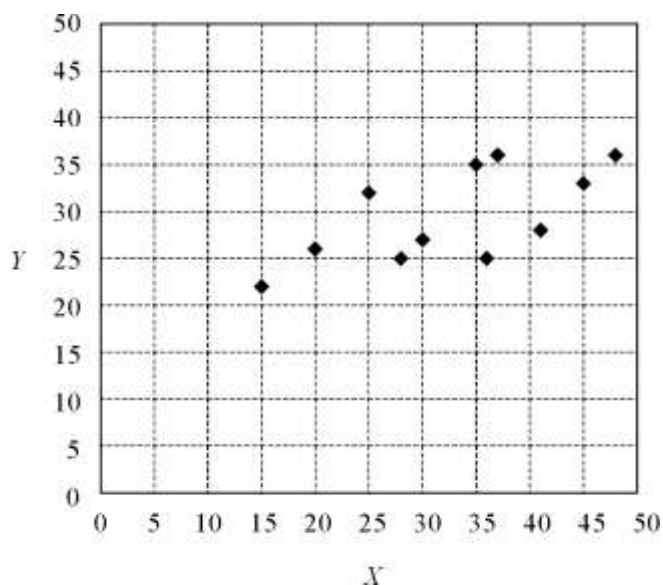
- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 丁 (5) 戊

【數乙 95 單選 2】

21. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部分。下列的散佈圖中每個點 (X,Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分， Y 表該生非選擇題的得分。設

$$Z = X + Y$$

為各生在該測驗的總分。共有 11 位學生的得分數據。



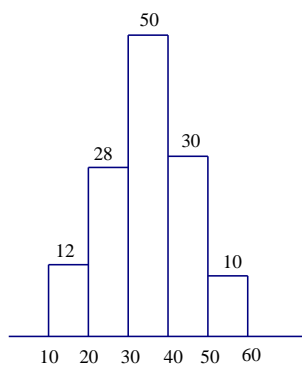
試問以下哪些選項是正確的？

- (1) X 的中位數 $>$ Y 的中位數
- (2) X 的標準差 $>$ Y 的標準差
- (3) X 的全距 $>$ Y 的全距
- (4) Z 的中位數 = X 的中位數 + Y 的中位數

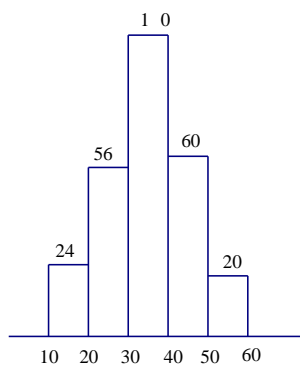
【數乙95單選7】

22. 下列五個直方圖表示的資料，何者之標準差最大？

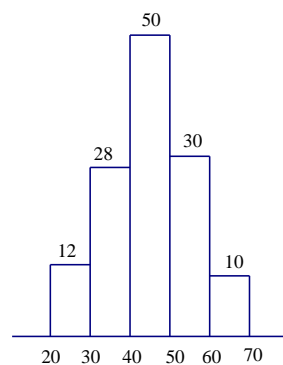
(1)



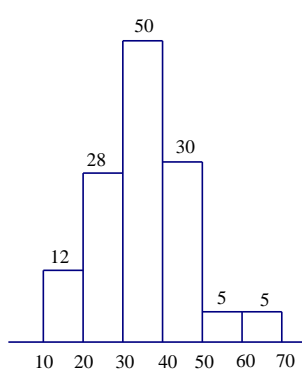
(2)



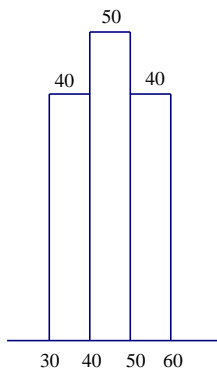
(3)



(4)



(5)



【數乙 94 單選 2】

23. 某大學數學系甄選入學的篩選方式如下：

先就學科能力測驗國文、英文和社會這三科成績（級分）加總做第一次篩選。然後從通過篩選的學生當中，以自然科的成績做第二次篩選。

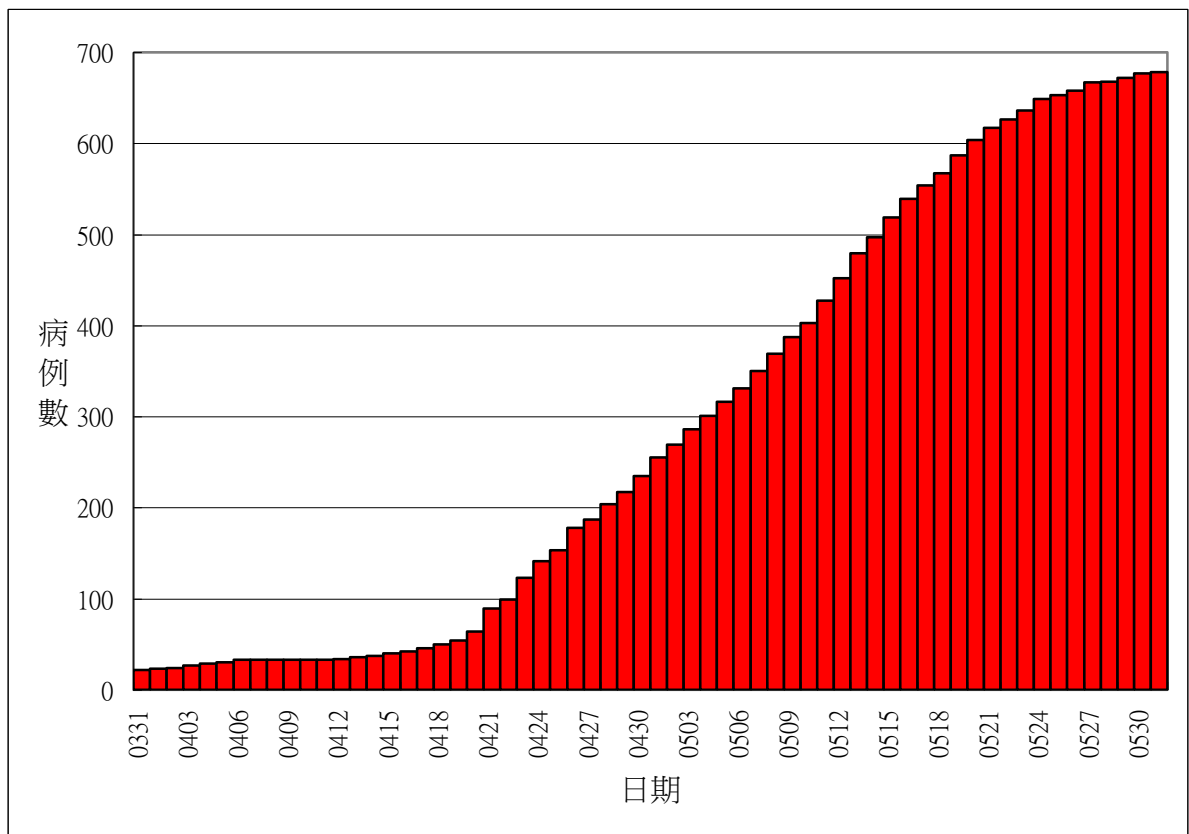
最後再從通過的學生當中，以數學科的成績做第三次篩選，選出一些學生參加面試。現在有五位報名該系的學生的學科能力測驗成績如下表：

學生	國文級分	英文級分	數學級分	社會級分	自然級分
甲	13	8	14	15	11
乙	12	12	12	12	12
丙	9	13	15	8	15
丁	11	12	13	10	13
戊	13	15	11	7	12

已知這五位學生當中，通過第一次篩選的有四位，通過第二次篩選的有三位，通過第三次篩選可以參加面試的只剩下一位。請問哪一位學生參加面試？

- (1) 甲 (2) 乙 (3) 丙 (4) 丁 (5) 戊

24. 下圖為台灣 SARS 疫情病例累計趨勢統計圖(3 月 31 日到 5 月 31 日)



從 4 月 22 日到 5 月 14 日共 23 天的每日平均新增病例數，最接近下列哪一個值？

- (1) 11 (2) 14 (3) 17 (4) 20 (5) 23

~參考解答~

- 【1】134 【2】12345 【3】135 【4】1235 【5】15 【6】(1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{5}{7}$ 【7】28 【8】124 【9】13
 【10】12 【11】 $\frac{5}{21}$ 【12】 $\frac{2}{19}$ 【13】345 【14】63 【15】79 【16】14 【17】3 【18】2 【19】2
 【20】4 【21】123 【22】4 【23】4 【24】3

(D) 模擬試題觀摩

1. 某種疾病的檢驗方法不是百分之百正確，依過去之經驗知道，患有此疾病的人檢驗能正確判斷的可能性為 0.92；不患有此疾病的人，則檢驗做了錯誤判斷的可能性為 0.04，假設一群人中已知 20% 患有此疾病，而這一群人之中任取一人加以檢驗，則：

- (1) 檢驗判定此人患有此疾病的機率為_____。(到小數第三位)
- (2) 檢驗判定此人患有此疾病，而此人確患有此疾病的機率為_____。
- (3) 檢驗判定此人患有此疾病，而此人不患有此疾病的機率為_____。
- (4) 檢驗判定此人不患有此疾病的機率為_____。

2. 根據統計，HBL 球星浩浩近五場上場時間 X (單位：分鐘)與得分 Y (單位：分)如下表：

其中第四場的得分因污損看不清楚，但已知此五場比賽 Y 對 X 的迴歸直線為

$$y = \frac{12}{13}x - \frac{84}{13}。請選出正確的選項。$$

上場時間(X)	32	30	36	40	27
得分(Y)	25	18	26	a	20

- (1) 這五場的平均上場時間為 33 分鐘
- (2) 這五場的平均得分數為 25 分
- (3) 第四場的得分 $a = 36$
- (4) 這五場上場時間的標準差小於 4
- (5) 上場時間與得分數的相關係數小於 $\frac{12}{13}$

3. 設 x_1, x_2, \dots, x_{20} 是從 1, 2, 3 這三個數中重複取值所構成的數列，

$$\text{若 } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{20}^2 = 110, \quad x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{20}^3 = 296,$$

則 x_1, x_2, \dots, x_{20} 這 20 筆資料的標準差 $\sigma =$ _____。

4. 甲乙兩人練習 5k 慢跑，

甲於 A 場地練習 10 次，B 場地練習 2 次；乙於 A 場地練習 2 次，B 場地練習 10 次。

若甲在兩場地的平均練習時間皆分別小於乙兩場地的平均練習時間，

則下列哪些選項是正確的？(假設 4 個平均時間皆相異)

- (1) 甲所有練習時間的平均一定比乙所有練習時間的平均還少
- (2) 甲所有練習時間的平均為甲兩場地平均值和的一半
- (3) 甲所有練習時間的平均介於甲兩場地的平均值之間
- (4) 甲的最快練習時間必少於乙的最快練習時間
- (5) 甲所有練習時間的標準差一定比乙所有練習時間的標準差還少。

~參考解答~

【1】(1)0.216 (2) $\frac{23}{27}$ (3) $\frac{4}{27}$ (4)0.784 【2】15 【3】 $\sqrt{\frac{33}{50}}$ 【4】3

～單元筆記～