



**【觀念 4】根式的運算**

(4.1) 正二次根號：若  $a > 0$ ，則平方後恰等於  $a$  的正數只有一個，記為  $\sqrt[2]{a}$ ，簡記為  $\sqrt{a}$ 。

【註】若  $a < 0$ ，則之後會定義  $\sqrt{a}$  為複數。

(4.2) 若  $a < 0$  且  $b < 0$ ，則  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ ；其他情形，則  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

若  $a > 0$  且  $b < 0$ ，則  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ ；其他情形，則  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

(4.3) 雙重根式的化簡

$a, b$  為正數，且  $a > b$ ，則： $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ， $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}|$

**【觀念 5】乘法公式**

(5.1)  $(a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.2)  $(a-b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.3)  $(a+b)(a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.4)  $(a+b+c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.5)  $(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(5.6)  $(a-b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.7)  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(5.8)  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

**【觀念 6】算幾不等式**

(6.1) 設  $a > 0, b > 0$  則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中  $\frac{a+b}{2}$  稱為  $\underline{\hspace{2cm}}$ ， $\sqrt{ab}$  稱為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

當  $\underline{\hspace{2cm}}$  時，等號成立。

(6.2) 設  $a > 0, b > 0, c > 0$ ，則  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ ，當  $\underline{\hspace{2cm}}$  時，等號成立。

**【觀念 7】分點公式**

(7.1) 數線上的分點坐標：數線上兩點  $A(a)$  與  $B(b)$ ，若  $A-P-B$ ，且  $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r = \frac{m}{n}$ ，

其中  $m, n$  為正實數，則  $P$  的坐標為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(7.2) 平面上的分點公式：在平面上給定兩點  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，而且

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r = \frac{m}{n}$ 。若  $A-P-B$ ，則  $P$  ( , )

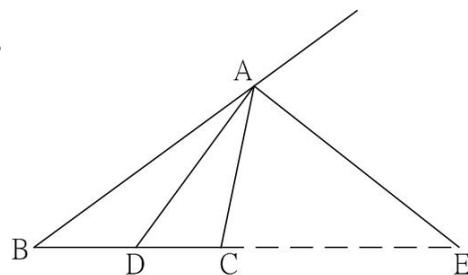
(7.3) 特例：(a) 在平面上給定兩點  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，則  $\overline{AB}$  的中點  $M = ($  , )

(b) 在平面上  $\triangle ABC$  之三頂點分別為  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，則  $\triangle ABC$  之重心  $G = ($  , )

### 【觀念 8】內分比與外分比

(8.1) 在  $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AD}$  為  $\angle A$  之內角平分線交  $\overline{BC}$  於  $D$ ，  
則\_\_\_\_\_。

(8.2) 在  $\triangle ABC$  中，若  $\overline{AE}$  為  $\angle A$  之外角平分線交  $\overline{BC}$  於  $E$ ，  
則\_\_\_\_\_。



### 【觀念 9】內心的性質

(9.1) 內心為\_\_\_\_\_。

(9.2) 內心到三邊之距離相等，此距離為三角形之\_\_\_\_\_。

(9.3) 設  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$ ，其中  $\overline{AB} = c$ ， $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ ，  
則  $\triangle ABC$  之內心坐標  $I$  為( , )

### 【觀念 10】絕對值

(10.1)  $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

(10.2) 絕對值的性質：(a)  $|x| \geq 0$  (b)  $|x - y| = |y - x|$  (c)  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  (d)  $|x + y| \leq |x| + |y|$   
可由(d)推得 (e)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

(10.3) 設  $y = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$ ，其中  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

(a) 若  $n$  是奇數，則圖形的最低點處是一點  $(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}, f(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}))$ ，故當  $x = \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2}$  時，

$f(x)$  有最小值  $f(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{2})$

(b) 若  $n$  是偶數，則圖形的最底處是一條水平線段，故當  $\frac{a_{\frac{n}{2}}}{2} \leq x \leq \frac{a_{\frac{n}{2}+1}}{2}$  時，

$f(x)$  有最小值  $f(\frac{a_{\frac{n}{2}}}{2})$

(10.4) 若  $|x| \leq a$ ，則充要條件為  $-a \leq x \leq a$ ；若  $|x| \geq a$ ，則充要條件為  $x \geq a$  或  $x \leq -a$

**(B) 綜合題型分析****題型 1**

下列哪些是有理數？

- (A) 3.1416      (B)  $\pi$       (C)  $\log_{15} \sqrt{5} + \log_{15} \sqrt{3}$       (D)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$       (E)  $\sqrt[3]{-27}$

**解：**

【答】ACE

**題型 2**

下列敘述何者正確？

- (A) 若  $a$ 、 $b$  為異於 0 之實數，若  $a > b$ ，則  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
- (B) 沒有實數  $x$  滿足  $|x-2| + |x+3| \leq 4$
- (C) 若  $a$ 、 $c$  為有理數， $b$ 、 $d$  為無理數，且  $a+b=c+d$ ，則  $a=c$ ， $b=d$
- (D) 若  $a < 0$ 、 $b < 0$ ，則  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$
- (E) 數線上  $A$  點坐標為  $a$ ， $B$  點坐標為  $b$ ，滿足  $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則  $P$  點坐標為  $\frac{na+mb}{m+n}$

**解：**

【答】B

### 題型 3~數乙 105 單選 2~

考慮有理數  $\frac{n}{m}$ ，其中  $m、n$  為正整數且  $1 \leq mn \leq 8$ 。則這樣的數值（例如  $\frac{1}{2}$  與  $\frac{2}{4}$  同值，只算一個）共有幾個？ (1) 14 個 (2) 15 個 (3) 16 個 (4) 17 個 (5) 18 個

**解：**

【答】4

### 題型 4

若  $a、b$  是實數，則下列哪些選項是正確的？

(A) 若  $a+b\sqrt{5}=0$  (B)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$  (C) 若  $a < b$ ，則  $a < \frac{5a+3b}{8} < \frac{3a+5b}{8}$

(D)  $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$  (E)  $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2+2\sqrt{3}$

**解：**

【答】BE

## 題型 5~數甲 99 多選 6~

設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為函數  $f(x) = x + \frac{2}{x}$ 、 $g(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$ 、 $h(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2}{x^2}}$  在  $x$  為任意正實數時的最小值。試問下列哪些選項是正確的？

- (A)  $b = a^2$
- (B)  $c = 2^{\frac{3}{4}}$
- (C)  $f(x) + g(x)$  在  $x$  為任意正實數時的最小值為  $a + b$
- (D)  $g(x) + h(x)$  在  $x$  為任意正實數時的最小值為  $b + c$

解：

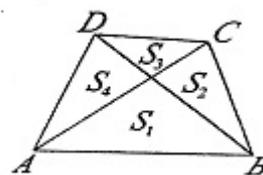
【答】BD

## 題型 6~台中市模擬考題~

如右圖，梯形  $ABCD$  中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且  $\overline{AB} \neq \overline{CD}$ ，

$S_i$  表示圖中各區域之面積，則下列何者為真？\_\_\_\_\_。

- (A)  $S_1 + S_3 > S_2 + S_4$     (B)  $S_1 + S_3 < S_2 + S_4$     (C)  $S_1 \cdot S_3 > S_2 \cdot S_4$
- (D)  $S_1 \cdot S_3 < S_2 \cdot S_4$



解：

【答】A

## 題型 7~數乙 103 多選 7~

三個相異實數  $a$ 、 $b$ 、 $c$  滿足  $b = \frac{4}{5}a + \frac{1}{5}c$ ，如果將  $a$ 、 $b$ 、 $c$  標示在數線上，則

(1)  $b$  在  $a$  與  $c$  之間 (2)  $c > b$  (3) 若  $d = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}c$ ，則  $d$  在  $a$  與  $b$  之間

(4)  $a$  到  $c$  的距離是  $a$  到  $b$  的距離的 5 倍 (5) 如果  $|b| = \frac{4}{5}|a| + \frac{1}{5}|c|$ ，則  $a \cdot b \cdot c > 0$

【答】14

## 題型 8

滿足絕對值不等式  $||x| - |x - 6|| \leq 2$  的整數解  $x$  共有幾個？

(1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個

**解：**

【答】3

## 題型 9~學測 105 多選 7~

下列各方程式中，請選出有實數解的選項。

(1)  $|x| + |x-5| = 1$

(2)  $|x| + |x-5| = 6$

(3)  $|x| - |x-5| = 1$

(4)  $|x| - |x-5| = 6$

(5)  $|x| - |x-5| = -1$

**解：**

【答】235

## 題型 10

四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ 、 $\overline{BC} = 4$ 、 $\overline{CD} = 3$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，點  $P$  在  $\overline{AB}$  上，點  $Q$  在  $\overline{CD}$  上，若  $\overline{PQ}$  平分四邊形  $ABCD$  的面積，則  $\overline{PQ}$  的最小值為\_\_\_\_\_。

【答】 $18\sqrt{2} - 18$

(C) 單元演練(一)

1. 下列哪些是有理數？

(A) 3.1416

(B)  $\sqrt{3}$

(C)  $\log_{10} \sqrt{5} + \log_{10} \sqrt{2}$

(D)  $\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ}$

(E)  $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$  之實根

【98 學測】

2. 設  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  為一實數數列，且對所有的正整數  $n$  滿足  $a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n$ ，

請問下列哪些選項是正確的？

(A) 如果  $a_1 = 1$ ，則  $a_2 = 1$

(B) 如果  $a_1$  是整數，則此數列的每一項都是整數

(C) 如果  $a_1$  是無理數，則此數列的每一項都是無理數

(D)  $a_2 \leq a_4 \leq \dots \leq a_{2n} \leq \dots$  ( $n$  為正整數)

(E) 如果  $a_k$  是奇數，則  $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$  都是奇數 ( $n$  為正整數)

【99 學測】

3. 張師傅想為公司設計底面為正方形，且沒有蓋子的長方體紙盒，裡面白色，外面灰色，設在灰色部份面積為 432 平方公分限制下，要使紙盒之容積最大，他應將此無蓋長方體紙盒底面每邊設計為\_\_\_\_\_公分。 【96 指考數甲】
4. 坐標平面上有四個點  $O(0,0)$ 、 $A(-3,-5)$ 、 $B(6,0)$ 、 $C(x,y)$ ，今有一質點在  $O$  點沿  $\overrightarrow{AO}$  方向前進  $\overline{AO}$  距離後停在  $P$ ，再沿  $\overrightarrow{BP}$  方向前進  $2\overline{BP}$  距離後停在  $Q$ 。假設此質點繼續沿  $\overrightarrow{CQ}$  方向前進  $3\overline{CQ}$  距離後回到原點  $O$ ，則  $(x,y)=$ \_\_\_\_\_。 【98 學測】
5. 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為  $(9,8)$  及天樞的坐標為  $(7,11)$ 。依上述資訊可以推得北極星的坐標為\_\_\_\_\_。 【101 學測】

6. 關於下列不等式，請選出正確的選項。\_\_\_\_\_。

(1)  $\sqrt{13} > 3.5$       (2)  $\sqrt{13} < 3.6$       (3)  $\sqrt{13} - \sqrt{3} > \sqrt{10}$

(4)  $\sqrt{13} + \sqrt{3} > \sqrt{16}$       (5)  $\frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{3}} > 0.6$

【103 學測多選 9】

7. 設  $k$  為一整數。已知  $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則  $k =$ \_\_\_\_\_。

【102 學測選填 A】

8. 下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。

(1)  $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 0.\overline{6} + 0.\overline{4}$

(2)  $0.\overline{72} + 0.\overline{28} = 1.\overline{1}$

(3)  $0.\overline{7} + 0.\overline{3} = 1$

(4)  $0.\overline{5} + 0.\overline{5} = 1.\overline{1}$

(5)  $0.\overline{49} = 0.5$

【102 數乙多選 4】

9. 張師傅想為公司設計底面為正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒，裡面白色，外面灰色。在灰色部分的面積為 432 平方公分的限制之下，為了使紙盒的容量達到最大，他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計為\_\_\_\_\_公分。

【102 數甲選填 C】

~解答~

【1】(A)(C)(D) 【2】(B)(C)(D) 【3】12 【4】(-4,20) 【5】(-3,26) 【6】(1)(4) 【7】16 【8】145

【9】12

**(D) 模擬試題觀摩：**

1. 設實數  $k < 0$ ，則  $\sqrt{-k} \cdot \sqrt{k^2} \cdot \sqrt{k^3} \cdot \sqrt{-k^4} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- (1)  $k^5$    (2)  $-k^5$    (3)  $k^5i$    (4)  $-k^5i$    (5) 1

2.  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  為實數，下列何者恆成立？

(A)  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$       (B)  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$       (C)  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \geq a + b + c + d$

(D)  $\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$       (E)  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \leq (ac \pm bd)^2$

3. 空間中一平面  $E$  通過點  $P(4,1,4)$ ，且與  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸的正向分別交於點  $A$ 、 $B$ 、 $C$ ，設

$O$  為原點，(1) 四面體  $OABC$  的體積最小為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) 求  $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$  的最小值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

~解答~

【1】1   【2】CD   【3】(1)72 (2)25